MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

25 de Maio

Aula de hoje: Conjuntos Limites

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t,x) \neq \phi(s,x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t,x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

Conjuntos ω-limite e α-limite

Definição

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^d$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d$. Dado um ponto $x \in \mathcal{A}$ definimos os conjuntos

$$\omega(x) = \{p \in \mathcal{A};\ \text{existe}\ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \text{tal que}\ t_n \to +\infty\ \text{e}\ \phi(t_n, x) \to p\}$$

e

$$\alpha(x) = \{p \in \mathcal{A};\ \text{existe}\ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \text{tal que}\ t_n \to -\infty\ \text{e}\ \phi(t_n, x) \to p\}$$

chamados de **conjunto ω-limite** e **conjunto α-limite**, respectivamente.

Exemplo 1

Se γ é um órbita periódica, então para qualquer $x \in \gamma$, temos $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$.

Exemplo 2

Para o campo linear $f(x, y) = (x, -y)$ temos:

Exemplo 1

Se γ é um órbita periódica, então para qualquer $x \in \gamma$, temos $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$.

Exemplo 2

Para o campo linear $f(x, y) = (x, -y)$ temos:

- $\omega(0) = \alpha(0) = \{0\}$;
- se $x \in E_1 \setminus \{0\}$, então $\omega(x) = \emptyset$ e $\alpha(x) = \{0\}$;
- se $x \in E_2 \setminus \{0\}$, então $\omega(x) = \{0\}$ e $\alpha(x) = \emptyset$;
- se $x \in (E_1 \cup E_2)^C$, então $\omega(x) = \alpha(x) = \emptyset$.

Exemplo 3

Considere o campo $f(x, y) = (-y + x(x^2 + y^2 - 1), x + y(x^2 + y^2 - 1))$ e seja γ a sua órbita periódica. Temos então:

Exemplo 1

Se γ é um órbita periódica, então para qualquer $x \in \gamma$, temos $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$.

Exemplo 2

Para o campo linear $f(x,y) = (x, -y)$ temos:

- $\omega(0) = \alpha(0) = \{0\}$;
- se $x \in E_1 \setminus \{0\}$, então $\omega(x) = \emptyset$ e $\alpha(x) = \{0\}$;
- se $x \in E_2 \setminus \{0\}$, então $\omega(x) = \{0\}$ e $\alpha(x) = \emptyset$;
- se $x \in (E_1 \cup E_2)^C$, então $\omega(x) = \alpha(x) = \emptyset$.

Exemplo 3

Considere o campo $f(x,y) = (-y + x(x^2+y^2-1), x + y(x^2+y^2-1))$ e seja γ a sua órbita periódica. Temos então:

- se x é um ponto no *interior* de γ, então $\alpha(x) = \{0\}$;
- se x é um ponto no *exterior* de γ, então $\alpha(x) = \emptyset$;
- se x é um ponto em γ, então $\alpha(x) = \gamma$;
- se $x \neq 0$, então $\omega(x) = \gamma$.

Exemplo 4

Para o campo

$$f(x,y) = (\sin(x)(-0,1\cos(x) - \cos(y)), \sin(y)(\cos(x) - 0,1\cos(y)))$$

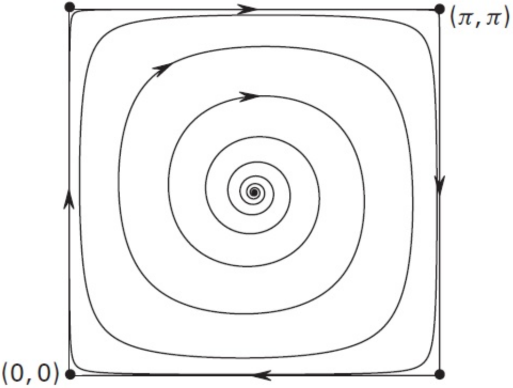
temos o seguinte:

Exemplo 4

Para o campo

$$f(x,y) = (\sin(x)(-0,1\cos(x) - \cos(y)), \sin(y)(\cos(x) - 0,1\cos(y)))$$

temos o seguinte:



PROPRIEDADES

- Note que o conjunto α-limite de x para o campo f é o conjunto ω-limite de x para o campo $-f$.

Propriedades

- Note que o conjunto α-limite de x para o campo f é o conjunto ω-limite de x para o campo $-f$.

Definição

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t, p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

Propriedades

- Note que o conjunto α-limite de x para o campo f é o conjunto ω-limite de x para o campo $-f$.

Definição

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t,p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

Proposição

(a) Se y pertence a órbita de x, então $\omega(x) = \omega(y)$.

Propriedades

- Note que o conjunto α-limite de x para o campo f é o conjunto ω-limite de x para o campo $-f$.

Definição

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t,p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

Proposição

(a) Se y pertence a órbita de x, então $\omega(x) = \omega(y)$.

(b) O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.

Propriedades

- Note que o conjunto α-limite de x para o campo f é o conjunto ω-limite de x para o campo $-f$.

Definição

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t, p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

Proposição

(a) Se y pertence a órbita de x, então $\omega(x) = \omega(y)$.

(b) O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.

(c) Se $F \subseteq \mathcal{A}$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $\omega(x) \in F$, para todo $x \in F$.

Propriedades

- Note que o conjunto α-limite de x para o campo f é o conjunto ω-limite de x para o campo $-f$.

Definição

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t,p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

Proposição

(a) Se y pertence a órbita de x, então $\omega(x) = \omega(y)$.

(b) O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.

(c) Se $F \subseteq \mathcal{A}$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $\omega(x) \in F$, para todo $x \in F$.

(d) Se $z \in \omega(x)$, então $\omega(z) \subseteq \omega(x)$.

Propriedades

- Note que o conjunto α-limite de x para o campo f é o conjunto ω-limite de x para o campo $-f$.

Definição

Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t,p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

Proposição

(a) Se y pertence a órbita de x, então $\omega(x) = \omega(y)$.

(b) O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.

(c) Se $F \subseteq \mathcal{A}$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $\omega(x) \in F$, para todo $x \in F$.

(d) Se $z \in \omega(x)$, então $\omega(z) \subseteq \omega(x)$.

(e) Se $\omega(x)$ é compacto, então é conexo.

O teorema de Poincaré-Bendixson

Teorema

Seja $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo planar de classe C^1 cujas soluções de $x' = f(x)$ estão definidas em R. Nestas condições, os únicos conjuntos ω-limite compactos, não vazios e sem singularidades são as órbitas periódicas do campo.