MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

16 de Março

Aula de hoje: Existência e unicidade das soluções (Parte I)

- O problema de Cauchy;
- Aproximações sucessivas;
- Espaços métricos completos (uma brevíssima introdução);
- Alguns espaços de funções;
- Teorema de Banach para o ponto fixo de contrações;

O grande objetivo

Problema de valor inicial

Considere o problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

no qual $f = f(t,x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$.

Definição

Uma solução da equação (2) em U é uma função (ou caminho) $x : I \to \mathbb{R}^n$ que é derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 cujo gráfico está contido em U e satisfaz a igualdade

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in I.$$

O grande objetivo

Problema de valor inicial

Considere o problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

no qual $f = f(t,x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$.

Definição

Uma solução da equação (2) em U é uma função (ou caminho) $x : I \to \mathbb{R}^n$ que é derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 cujo gráfico está contido em U e satisfaz a igualdade

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in I.$$

Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma unção contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em U. Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I. (2) definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

Sobre a notação

- Como $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ denota a função
$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \to M(n),$$
dada por
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)\right]_{n\times n}\\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t,x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t,x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t,x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(t,x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(t,x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t,x) \end{bmatrix}_{n\times n}\end{aligned}$$

- Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em U se, e somente se, cada $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ é contínua em U.

Motivação

- Considere o problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

Motivação

- Considere o problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

Uma função auxiliar

Seja $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ a aplicação

$$Ty(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} y(s)ds,$$

sendo $\mathcal{F}$ um espaço de funções adequado.

Motivação

- Considere o problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

Uma função auxiliar

Seja $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ a aplicação

$$Ty(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} y(s)ds,$$

sendo $\mathcal{F}$ um espaço de funções adequado.

- Note que x é solução do problema acima se, e somente se, é um **ponto fixo** de T, ou seja,

$$T(x) = x.$$

- Considere então $y_1 \equiv x_0$ e defina

$$y_{n+1} = T(y_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Uma ideia

- Considerando então o problema geral

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

no qual $f = f(t,x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$.

Uma ideia

- Considerando então o problema geral

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

no qual $f = f(t,x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$.

- Novamente, podemos definir o operador $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ pondo

$$T(y) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

sendo $\mathcal{F}$ um espaço de funções adequado.

Uma ideia

- Considerando então o problema geral

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

no qual $f = f(t,x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$.

- Novamente, podemos definir o operador $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ pondo

$$T(y) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

sendo $\mathcal{F}$ um espaço de funções adequado.

- Assim, x é solução do problema se, e somente se, é um **ponto fixo** de T, ou seja,

$$T(x) = x.$$

Uma ideia

- Considerando então o problema geral

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

no qual $f = f(t,x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em $\mathbb{R}^n$.

- Novamente, podemos definir o operador $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ pondo

$$T(y) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

sendo $\mathcal{F}$ um espaço de funções adequado.

- Assim, x é solução do problema se, e somente se, é um **ponto fixo** de T, ou seja,

$$T(x) = x.$$

- Podemos ainda tomar $y_1 \in \mathcal{F}$, com $y_1(t_0) = x_0$ e definir

$$y_{n+1} = T(y_n), \; n \in \mathbb{N}.$$

PERGUNTAS

- Qual é esse espaço de funções $\mathcal{F}$?
- Que tipo de convergência esperamos para o limite $\lim_{n\to\infty} y_n$?
- Como garantir que T possua **único** ponto fixo?

Espaço métricos

Definição (Métrica)

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$.

(D2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$. (Desigualdade Triangular)

Espaço métricos

Definição (Métrica)

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(D1) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$.

(D2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in M$. (Desigualdade Triangular)

- Um conjunto M munido de uma métrica d é chamado de *Espaço Métrico* e quando seja necessário este será denotado por (M, d).
- Se consideramos num conjunto M duas métricas, digamos d_1 e d_2, então teremos dois espaços métricos $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$.
- Se (M, d) é um espaço métrico e $X \subset M$ é um subconjunto, então podemos considerar o espaço métrico $(X, \widetilde{d})$, sendo $\widetilde{d}$ a restrição de d ao conjunto $X \times X$. (Dizemos que $\widetilde{d}$ é a métrica induzida por d).

O exemplo que nos interessa: espaços normados

Definição (Norma)

Uma norma num $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in V$.

O EXEMPLO QUE NOS INTERESSA: ESPAÇOS NORMADOS

DEFINIÇÃO (NORMA)

Uma norma num $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in V$.

- O par $(V, \|\cdot\|)$ é dito ser um *espaço normado*.
- Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e W é um subespaço vetorial de V, então temos o espaço normado $(W, \|\cdot\|_W)$, sendo $\|\cdot\|_W$ a restrição de $\|\cdot\|$ sobre W.

O exemplo que nos interessa: espaços normados

Definição (Norma)

Uma norma num $\mathbb{K}$-espaço vetorial V é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in V$.

- O par $(V, \|\cdot\|)$ é dito ser um *espaço normado*.
- Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e W é um subespaço vetorial de V, então temos o espaço normado $(W, \|\cdot\|_W)$, sendo $\|\cdot\|_W$ a restrição de $\|\cdot\|$ sobre W.

Proposição

Num espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ tem-se a métrica (induzida por $\|\cdot\|$):

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{N}}.$$

O ESPAÇO EUCLIDIANO

- Considere $\mathbb{R}^n$ com sua estrutura natural de espaço vetorial real e assuma fixada a base canônica. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escreva $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}, \ \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \ \text{ e } \ \|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|.$$

O ESPAÇO EUCLIDIANO

- Considere $\mathbb{R}^n$ com sua estrutura natural de espaço vetorial real e assuma fixada a base canônica. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escreva $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}, \ \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \ \text{ e } \ \|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|.$$

Normas equivalentes

É possível mostrar que em $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes, isto é, dadas duas normas $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_2$, existem contantes a, b tais que

$$a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Espaços de funções

- Sejam X um conjunto arbitrário e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é limitada se existe $K \geq 0$ tal que
$$|f(x)| \leq K, \ \forall x \in X.$$
- O conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$.

Espaços de funções

- Sejam X um conjunto arbitrário e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é limitada se existe $K \geq 0$ tal que
$$|f(x)| \leq K, \ \forall x \in X.$$
- O conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$.

Uma norma em $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$

A função $\|\cdot\| : \mathscr{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por
$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$
define uma norma em $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$, chamada de *norma da convergência uniforme*.

Uma norma em $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto e $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas $f : I \to \mathbb{R}^n$. Então temos a norma
$$\|f\| = \sup_{x\in I} \|f(x)\| = \max_{x\in I} \|f(x)\|$$

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ converge para $x \in M$ se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) \leq \epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

- Utilizaremos a notação

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ ou simplesmente, } x_n \to x.$$

- Exercício: Se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, então $x = y$.

Sequência convergente

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ converge para $x \in M$ se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) \leq \epsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

- Utilizaremos a notação

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ ou simplesmente, } x_n \to x.$$

- Exercício: Se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, então $x = y$.

Sequência de Cauchy

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ é de Cauchy se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Espaço métrico completo

Definição

Um espaço métrico M é dito completo se toda sequência de Cauchy é convergente. Em particular:

- Um espaço normado completo é dito *Espaço de Banach*
- Um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*

ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO

DEFINIÇÃO

Um espaço métrico M é dito completo se toda sequência de Cauchy é convergente. Em particular:

- Um espaço normado completo é dito *Espaço de Banach*
- Um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*

EXEMPLOS

(a) $\mathbb{K}^n$ é completo.

(b) Todo espaço normado de dimensão finita é Banach.

(c) Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.

(d) O espaço $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$ com a norma da convergência uniforme é completo.

Ponto de fixo de Banach para contrações

Teorema

Seja (M, d) um espaço métrico completo. Se $f : M \to M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

então f tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in M$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Ponto de fixo de Banach para contrações

Teorema

Seja (M, d) um espaço métrico completo. Se $f : M \to M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

então f tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in M$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Corolário

Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma função. Se existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que f^k é uma contração, então f possui um único ponto fixo $a \in M$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = a, \ \forall x \in M.$$

(Dem: Corolário 8.6 no livro do Lopes)

Retornemos ao problema principal

Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em U. Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

- Tática para a demonstração: iniciar com algumas hipóteses extras...

A HIPÓTESE LIPSCHITZ

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial em U se existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x - y\|, \ \forall (t,x), (t,y) \in U.$$

A HIPÓTESE LIPSCHITZ

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial em U se existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x - y\|, \ \forall (t,x), (t,y) \in U.$$

HIPÓTESE

Suponha que tenhamos um intervalo I tal que $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n \subset U$.

A hipótese Lipschitz

Definição

Dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial em U se existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x - y\|, \ \forall (t,x),(t,y) \in U.$$

Hipótese

Suponha que tenhamos um intervalo I tal que $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n \subset U$.

- Para cada $y \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$, defina

$$Ty(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \ t \in I.$$

- Note que x é solução de (5) se, e somente se, $Tx = x$.

- Note que $Ty \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$, ou seja, $T:\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$.
- Mais ainda, se supormos que I é um intervalo compacto, então $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo (ou um espaço de Banach).

- Note que $Ty \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^n)$, ou seja, $T : \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^n)$.
- Mais ainda, se supormos que I é um intervalo compacto, então $\mathscr{C}(I; \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo (ou um espaço de Banach).

Lema

Seja $K > 0$ uma constante de Lipschitz de f em $I \times \mathbb{R}^n$. Então, dado $m \in \mathbb{N}_0$,

$$|T^m g(t) - T^m h(t)| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m \|g - h\|,$$

para quaisquer $g, h \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^n)$ e todo $t \in T$.

Um primeiro resultado

Teorema 1

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Assuma que $[a,b] \times \mathbb{R}^n \subset U$ e que f é lipschitziana na variável espacial em $[a,b] \times \mathbb{R}^n$. Nestas condições, dados qualquer ponto $(t_0, x_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

definida no intervalo $[a,b]$.

Aplicação

Teorema 2

Sejam $A : I \to M(n)$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ dois caminhos contínuos num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Então, dados quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo I.

Aplicação

Teorema 2

Sejam $A : I \to M(n)$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ dois caminhos contínuos num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Então, dados quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo I.

Corolário

Se $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ é uma matriz real, então dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

definida em $\mathbb{R}$.