MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

23 de Março

Aula de hoje: Soluções maximais

- Soluções maximais.
- Soluções maximais e ∂U.

Uma boa referência...

Djairo, G. F. e Aloisio, F. N, Equações diferenciais aplicadas. IMPA, 2005.

- loja.sbm.org.br/equacoes-diferenciais-aplicadas.html

Sobre existência e unicidade das soluções

Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U. Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

Teorema 1

Suponha $f : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto W. Então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times W$ existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

SOBRE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DAS SOLUÇÕES

TEOREMA 2

Suponha $f : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto W. Então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times W$ existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

TEOREMA 3

Se $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ é uma matriz real, então dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

definida em $\mathbb{R}$.

Soluções maximais

Lema 1

Sejam $x_i : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$. Nestas condições,

$$x_1(t) = x_2(t), \ \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Soluções maximais

Lema 1

Sejam $x_i : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$. Nestas condições,

$$x_1(t) = x_2(t), \ \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Definição

Dizemos que uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ de (1) é **máxima** se, dada qualquer outra solução $\widetilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$, num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, tivermos que:

(a) $J \subseteq I$;

(b) $x(t) = \widetilde{x}(t)$, para todo $t \in J$.

Soluções maximais

Lema 1

Sejam $x_i : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$. Nestas condições,

$$x_1(t) = x_2(t),\ \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Definição

Dizemos que uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ de (1) é **máxima** se, dada qualquer outra solução $\widetilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$, num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, tivermos que:

(a) $J \subseteq I$;

(b) $x(t) = \widetilde{x}(t)$, para todo $t \in J$.

Proposição

Sejam f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ como no T.E.U.. Para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução máxima de (1), necessariamente definida num intervalo aberto.

Exercício

Sejam $x_1 : (a, t_0] \to \mathbb{R}^n$ e $x_2 : [t_0, b \to \mathbb{R}^n$ duas soluções de

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

Mostre que $x : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), \ t \leq t_0, \\ x_2(t), \ t \geq t_0 \end{cases}$$

é solução de (2).

PARA A FRONTEIRA E AVANTE...

Considere a equação

$$x' = 1 + x^2,$$

cujas soluções são dadas por

$$x(t) = \tan(t - c), \ c \in \mathbb{R}.$$

Note que nenhuma solução poder ser estendida além dos intervalos

$$c - \frac{\pi}{2} \leq t \leq c + \frac{\pi}{2},$$

uma vez que

$$x(t) \to \pm\infty, \ t \to c \pm \frac{\pi}{2}.$$

Exercício

Sejam f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ funções contínuas em todo $\mathbb{R}^{n+1}$ com f limitada em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

definida em toda a reta $\mathbb{R}$.

Para a fronteira e avante...

Teorema 4

Sejam f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ aplicações contínuas no aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in U$ e $x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ uma solução máxima de

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:

(a) Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que

$$(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}.$$

(b) Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que

$$(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}.$$

Observações

- O teorema acima diz que se uma solução x do problema não poder ser estendida a toda semi-reta (ou a toda a reta), então a solução "foge"de qualquer compacto em U.
- Isso quer dizer que quando $t \to \beta$, então $x(t)$ se acumula em ∂U, ou uma sequência $\|x(t_j)\|$ tende a ∞, ou ambos.