MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

29 de Março

Aula de hoje: Diferenciabilidade do fluxo

Existência e unicidade

Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U.

- Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

  definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

- Além disso, Para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução máxima de (1), necessariamente definida num intervalo aberto.

Continuidade do fluxo

- Dados $(u,x) \in U$, denote por $I = I(u,x)$ o intervalo (aberto) de definição da solução máxima do problema
$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(u) = x, \end{cases} \tag{2}$$
e por $\varphi(t,u,x)$ sua solução máxima.

Definição (Fluxo)

O **fluxo** da equação $x' = f(t,x)$ é por definição a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por
$$\varphi(t,u,x) = x + \int_u^t f(s,\varphi(s,u,x))ds, \tag{3}$$
sendo
$$\Omega = \Big\{(t,u,x) \in \mathbb{R}^{n+2};\ t \in I(u,x),\ (u,x) \in U\Big\} \subset \mathbb{R} \times U.$$

Teorema

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U. Então, o fluxo $\varphi(t,x,u)$ de $x' = f(t,x)$ é contínuo no aberto Ω.

Definição

Dizemos que

$$x' = f(t,x,\lambda) \doteq f_\lambda(t,x)$$

é uma **família a um parâmetro** $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k$ de equações diferenciais se $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ abertos. Uma caminho diferenciável $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$é dito **solução** dessa equação diferencial se:

(i) $(t, x(t)) \in U$, para todo $t \in I$;

(ii) existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t), \lambda_0) \doteq f_{\lambda_0}(t, x(t)),\ t \in I.$$

Definição (Fluxo)

O **fluxo** da equação com parâmetro é a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t,u,x,\lambda) = x + \int_u^t f(s, \varphi(s,u,x,\lambda), \lambda)ds, \tag{4}$$

sendo

$$\Omega = \{(t,u,x,\lambda);\ t \in I(u,x,\lambda),\ (u,x,\lambda) \in U \times \Lambda\} \subseteq \mathbb{R} \times U \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^{n+k+2}.$$

CONTINUIDADE DO FLUXO (COM PARÂMETROS)

TEOREMA

Sejam

$$f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n \;\text{ e }\; \frac{\partial f}{\partial x} : U \times \Lambda \to M(n)$$

funções contínuas no aberto $U \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$. Nestas condições, o fluxo $\varphi(t, u, x, \lambda)$ de $x' = f(t, x, \lambda)$ é contínuo no aberto

$$\Omega = \{(t, u, x, \lambda);\; t \in I(u, x, \lambda),\; (u, x, \lambda) \in U \times \Lambda\} \subseteq \mathbb{R}^{n+k+2}.$$

Diferenciabilidade do Fluxo

Teorema (Diferenciabilidade do Fluxo)

Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x} : U \to M(n)$ funções contínuas no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Então o fluxo $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x, \lambda)$ é uma aplicação de classe C^1. Além disso, vale

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, u, x) = f(t, \varphi(t, u, x)), \ \forall (t, u, x) \in \Omega,$$

e as derivadas parciais $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ satisfazem a equação diferencial linear

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, u, x)) \cdot y,$$

em $\mathbb{R}^n$, com condições iniciais

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, u, x) = -f(u, x) \ \text{ e } \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(u, u, x) = e_i,$$

respectivamente, sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Sobre as notações

- Como $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, então $\varphi(t,u,x) = (\varphi_1(t,u,x), \ldots, \varphi_n(t,u,x))$ e $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} : \Omega \to M(n)$, é dada por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,u,x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(t,u,x) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(t,u,x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(t,u,x) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(t,u,x) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(t,u,x) & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(t,u,x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(t,u,x) & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(t,u,x) & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(t,u,x) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- Podemos ainda escrever

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(t,u,x) = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(t,u,x), \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}(t,u,x)\right]^T$$

- Podemos ainda escrever

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(t,u,x) = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(t,u,x), \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u}(t,u,x)\right]^T$$

Fórmula de Liouville-Ostrogradski

Teorema

Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x} : U \to M(n)$ funções contínuas no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Então a derivada espacial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \Omega \to M(n),$$

satisfaz

$$\det \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,u,x) = \exp\left(\int_u^t \operatorname{tr} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s,u,x))ds \right).$$

Fluxo de equações autônomas

- Considere o caso particular em que $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Denote por $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x),\, x(0) = x$.
- Neste caso,

$$\phi(t,x) = x + \int_0^t f(\phi(s,x))ds,$$

  sendo $\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \in I(x),\ x \in E\right\} \subset \mathbb{R} \times E$.
- O fluxo equivale a

$$\phi(0,x) = x \ \text{ e } \ \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = f(\phi(t,x)) = f \circ \phi(t,x)$$

  para $(t,x) \in \Omega$.

Exemplo

O fluxo da equação $x' = Ax$ é $\phi(t,x) = \exp(tA)x,\ \Omega = \mathbb{R}^{n+1}$,

Teorema (Fluxo de equações autônomas)

Seja $f : E \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^r, $1 \leq r \leq \infty$ no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, o fluxo $\phi(t,x)$ de $x' = f(x)$ é de classe C^r no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, a derivada espacial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \Omega \to M(n),$$

satisfaz

$$\det \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr} Df(\varphi(s,x))ds \right).$$

Fluxo de equações autônomas (como na referência Smale)

- Considere $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\phi(t,x)$ o fluxo da equação $x' = f(x)$.

Fluxo de equações autônomas (como na referência Smale)

- Considere $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\phi(t, x)$ o fluxo da equação $x' = f(x)$.
- Seja $x(t)$ a solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

definida num intervalo fechado J que contenha a origem.

FLUXO DE EQUAÇÕES AUTÔNOMAS (COMO NA REFERÊNCIA SMALE)

- Considere $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\phi(t,x)$ o fluxo da equação $x' = f(x)$.
- Seja $x(t)$ a solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

  definida num intervalo fechado J que contenha a origem.
- Denotando por $Df|_{x(t)}$ a Jacobiana de f em $x(t)$, obtemos a aplicação contínua $A : J \to M(n)$ dada por

$$A(t) = Df|_{x(t)}.$$

Equação variacional

Definição

A equação variacional ao longo da curva $x(t)$ é definida por

$$U' = A(t)U.$$

Equação variacional

Definição

A equação variacional ao longo da curva $x(t)$ é definida por

$$U' = A(t)U.$$

Observação

- Note que para U_0 pequeno, a função

  $$J \ni t \mapsto x(t) + U(t)$$

  é uma boa aproximação de $x(t)$, com condição inicial $x(0) = x_0 + U_0$.
- Fixada uma condição inicial $U(0) = U_0$, existe uma única solução para a equação acima definida em J.

- Supondo ξ e $x_0 + \xi \in \mathcal{O}$, sejam $U(t,\xi)$ e $Y(t,\xi)$ soluções dos problemas

$$\begin{cases} U' = A(t)U, \\ U(0) = \xi, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = f(x), \\ Y(0) = x_0 + xi, \end{cases} , \tag{6}$$

respectivamente.

- Supondo ξ e $x_0 + \xi \in \mathcal{O}$, sejam $U(t,\xi)$ e $Y(t,\xi)$ soluções dos problemas

$$\left\{ \begin{array}{l} U' = A(t)U, \\ U(0) = \xi, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = f(x), \\ Y(0) = x_0 + xi, \end{array} \right. , \tag{6}$$

respectivamente.

Proposição

Nas condições acima, temos que

$$\lim_{\|\xi\| \to 0} \frac{\|Y(t,\xi) - x(t) - U(t,\xi)\|}{\|\xi\|} = 0,$$

uniformemente para todo $t \in J$.

- Note que o resultado acima diz que: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\xi\| \leq \delta$ implica em

$$\|Y(t,\xi) - x(t) - U(t,\xi)\| \leq \epsilon \|\xi\|, \ \forall t \in J.$$

Teorema

Se $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, então o fluxo $\phi(t,x)$ da equação $x' = f(x)$ é contínuo. Além disso, $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(t, x_0)$ é dado pela aplicação

$$\xi \mapsto U(t,\xi).$$

Demonstração da proposição

- Note primeiramente que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds,$$

$$Y(t,\xi) = x_0 + \xi + \int_0^t f(Y(s,\xi))ds,$$

$$U(t,\xi) = \xi + \int_0^t Df|_{x(s)}(U(s,\xi))ds.$$

Demonstração da proposição

- Note primeiramente que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds,$$

$$Y(t,\xi) = x_0 + \xi + \int_0^t f(Y(s,\xi))ds,$$

$$U(t,\xi) = \xi + \int_0^t Df|_{x(s)}(U(s,\xi))ds.$$

- Definindo $g(t,\xi) = \|Y(t,\xi) - x(t) - U(t,\xi)\|$, obtem-se

$$g(t,\xi) \leq \int_0^t \|f(Y(s,\xi)) - f(x(s)) - Df|_{x(s)}(U(s,\xi))\|ds$$

- Aplicando a fórmula de Taylor para f num ponto z, tem-se

$$f(y) - f(z) = Df|_z(y - z) + R(z, y - z),$$

com

$$\lim_{y \to z} \frac{R(z, y - z)}{\|y - z\|} = 0,$$

uniformemente em z, quando este está num compacto.

- Aplicando a fórmula de Taylor para f num ponto z, tem-se

$$f(y) - f(z) = Df|_z(y - z) + R(z, y - z),$$

com

$$\lim_{y \to z} \frac{R(z, y - z)}{\|y - z\|} = 0,$$

uniformemente em z, quando este está num compacto.

- Aplicando isto para $y = Y(s, \xi)$ e $z = x(s)$, chega-se em

$$g(t, \xi) \leq N \int_0^t g(s, \xi) ds + \int_0^t \|R(x(s), Y(s, \xi) - x(s))\| ds$$

- Aplicando a fórmula de Taylor para f num ponto z, tem-se

$$f(y) - f(z) = Df|_z(y - z) + R(z, y - z),$$

  com

$$\lim_{y \to z} \frac{R(z, y - z)}{\|y - z\|} = 0,$$

  uniformemente em z, quando este está num compacto.

- Aplicando isto para $y = Y(s, \xi)$ e $z = x(s)$, chega-se em

$$g(t, \xi) \leq N \int_0^t g(s, \xi) ds + \int_0^t \|R(x(s), Y(s, \xi) - x(s))\| ds$$

- Finalmente,

$$\frac{g(t, \xi)}{\|\xi\|} \leq C\epsilon e^{Nt}, \ \forall t \in J.$$