MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

4 DE ABRIL

Aula de hoje: Sistemas lineares

- Equações lineares;
- Conjugação;

T.E.U

Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U.

- Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

  definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

- Além disso, Para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução máxima de (1), necessariamente definida num intervalo aberto.

- Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo,

$$A : I \to M(n) \ \text{ e } \ b : I \to \mathbb{R}^n$$

duas aplicações contínuas.

TEOREMA

Para cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, definida em I, do problema

$$\begin{cases} x' = A(t) \cdot x + b, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

- Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo,

$$A : I \to M(n) \text{ e } b : I \to \mathbb{R}^n$$

duas aplicações contínuas.

Teorema

Para cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, definida em I, do problema

$$\begin{cases} x' = A(t) \cdot x + b, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

Definição

Quando $b \equiv 0$, chamaremos

$$x' = A(t) \cdot x \tag{2}$$

de equação homogênea.

- Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo,

$$A : I \to M(n) \;\text{ e }\; b : I \to \mathbb{R}^n$$

duas aplicações contínuas.

Teorema

Para cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, definida em I, do problema

$$\begin{cases} x' = A(t) \cdot x + b, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

Definição

Quando $b \equiv 0$, chamaremos

$$x' = A(t) \cdot x \tag{2}$$

de equação homogênea.

- Note que se φ é solução de (2) e $\varphi(s) = 0$ para algum $s \in I$, então $\varphi \equiv 0$.

Proposição

O conjunto $\mathscr{A}$ de todas as soluções da equação homogênea (2) é um espaço vetorial (subespaço de $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$). Além disso:

Proposição

O conjunto $\mathscr{A}$ de todas as soluções da equação homogênea (2) é um espaço vetorial (subespaço de $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$). Além disso:

(a) Dado $s \in I$, a aplicação $\Lambda_s : \mathbb{R}^n \to \mathscr{A}$ que a cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ associa a solução $\varphi(t,s,x_0)$, que passa por (s,x_0), é um isomorfismo;

Proposição

O conjunto $\mathscr{A}$ de todas as soluções da equação homogênea (2) é um espaço vetorial (subespaço de $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$). Além disso:

(a) Dado $s \in I$, a aplicação $\Lambda_s : \mathbb{R}^n \to \mathscr{A}$ que a cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ associa a solução $\varphi(t,s,x_0)$, que passa por (s,x_0), é um isomorfismo;

(b) $dim(\mathscr{A}) = n$;

Proposição

O conjunto $\mathscr{A}$ de todas as soluções da equação homogênea (2) é um espaço vetorial (subespaço de $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$). Além disso:

(a) Dado $s \in I$, a aplicação $\Lambda_s : \mathbb{R}^n \to \mathscr{A}$ que a cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ associa a solução $\varphi(t, s, x_0)$, que passa por (s, x_0), é um isomorfismo;

(b) $dim(\mathscr{A}) = n$;

(c) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é uma base de $\mathscr{A}$, sendo

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(t, s, v_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Conjugação

Definição

Duas matrizes $A, B \in M(n)$ são ditas conjugadas se existe $Q \in M(n)$ tal que

$$A = Q \cdot B \cdot Q^{-1}.$$

Conjugação

Definição

Duas matrizes $A, B \in M(n)$ são ditas conjugadas se existe $Q \in M(n)$ tal que

$$A = Q \cdot B \cdot Q^{-1}.$$

- A relação $A \sim B \doteq$ A e B são conjugadas é uma relação de equivalência em $M(n)$.
- Dizemos que Q conjuga A e B e escreveremos $A \sim_Q B$.

Conjugação

Definição

Duas matrizes $A, B \in M(n)$ são ditas conjugadas se existe $Q \in M(n)$ tal que

$$A = Q \cdot B \cdot Q^{-1}.$$

- A relação $A \sim B \doteq$ A e B são conjugadas é uma relação de equivalência em $M(n)$.
- Dizemos que Q conjuga A e B e escreveremos $A \sim_Q B$.

Proposição

Sejam $A, B \in M(n)$ duas matrizes tais que $A \sim_Q B$ e considere as equações

$$x' = Ax \text{ e } y' = By.$$

Nestas condições, são equivalentes:

(a) $y(t)$ é solução de $y' = By$;

(b) $Qy(t)$ é solução de $x' = Ax$.

Teorema

Sejam $A \in M(n)$ uma matriz diagonalizável, isto é, $A \sim_Q D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, os vetores $v_j = Q \cdot e_j, j = 1 \ldots, n$ e os caminhos

$$s_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j, \ t \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Sejam $A \in M(n)$ uma matriz diagonalizável, isto é, $A \sim_Q D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, os vetores $v_j = Q \cdot e_j, j = 1 \ldots, n$ e os caminhos

$$s_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j, \ t \in \mathbb{R}.$$

Nestas condições, cada s_j é solução de

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = v_j, \end{cases}$$

e $\{v_1, \ldots, v_j\}$ é uma base do espaço das soluções de $x' = Ax$. Além disso,

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \ell_j s_j(t)$$

é a única solução de

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = \sum_{j=1}^{n} \ell_j v_j. \end{cases}$$

Exemplo

- Considere a equação $x' = Ax$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Neste caso, $A \sim_Q diag(1, -1, -2)$, sendo

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$