`Análise III`

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

`LISTA 2: Entregar dia 1 de junho`

Exercício 1 *Um caminho diferenciável em* $\mathbb{R}^n$ *é uma função diferenciável* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$*, sendo* I *um intrevalo.*

(a) Mostre que se $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *é outro caminho diferenciável, então*

$$\frac{d}{dt}\langle f, g\rangle(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0)\rangle + \langle f(t_0), g'(t_0)\rangle.$$

(b) Se $I = [a, b]$ *e* $\|f'(t)\| \leqslant M$*, então* $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a)$*.*

(c) Defina $\int_a^b f(t)dt$ *pondo*

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t), \dots, \int_a^b f_n(t)\right).$$

Supondo f *de classe* C^1*, mostre que:*

(c1) $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$*;*

(c2) Obtenha outra demonstração para o item (b).

(c3) Por qual motivo estamos supondo f *de classe* C^1 *no item (c1)?:*

Exercício 2 *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $f : A \to \mathbb{R}^m$*,* $g : A \to \mathbb{R}^k$ *e* $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$*. Definindo*

$$\varphi(x) = \langle T(x) \cdot f(x), g(x)\rangle,$$

obtenha $\varphi'(x) \cdot h$*, para* $x \in A$ *e* $h \in \mathbb{R}^n$*.*

Exercício 3 *Considere* $A \in \mathbb{M}_3$ *como um elemento de* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$*, supondo cada linha* $a_i \in \mathbb{R}^3$*. Mostre que a aplicação determinante* $det : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{R}$ *é diferenciável e obtenha* $(det)'_{A_0}(I)$*.*

Exercício 4 *Considere* $\mathbb{M}_n$ *o conjunto das matrizes reais de ordem* n *e a função* $f : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ *dada por*

$$f(A) = A^3 + A^2.$$

Determine $Df_{A_0}(H)$*, com* $H \in \mathbb{M}_n$*.*

Exercício 5 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciável. Mostre quu:*

(a) $F(x) = \langle f(x), f(x)\rangle$ *é diferenciável, explicitando* $Df_{x_0}(h)$*.*

(b) se $\|f(x)\| \equiv 1$*, então* $det(f'(x)) \equiv 0$*.*