Análise III

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3: Entregar dia 29 de junho

Exercício 1 *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1. *Admita que*

$$f(x_0, y_0) = c \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

(a) *Verifique que o vetor gradiente de* f, *no ponto* (x_0, y_0), *é perpendicular ao gráfico de* $y = y(x)$.

(b) *Determine a reta tangente a curva* $f(x, y) = c$ *no ponto* (x_0, y_0).

Exercício 2 *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ *satisfazendo as condições do teorema da função implícita no ponto* (x_0, y_0), *com* $f(x_0, y_0) = c$. *Determine a equeção do plano tangente ao conjunto*

$$S = \{(x, y);\ f(x, y) = c\},$$

no ponto (x_0, y_0).

Exercício 3 *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções, sendo* g *de classe* C^∞ *determinada por*

$$g(x) = \int_0^{f(x)} (1 + t^2)dt.$$

Mostre que f *é de classe* C^∞.

Exercício 4 *Considere* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

Mostre que $\det(f'(x, y)) \neq 0$, *mas* f *não é injetiva em* $\mathbb{R}^2$ *Isso contradiz o Teorema da Função Implícita?.*

Exercício 5 *Sejam* $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hiperfície e* $p \in M$. *Mostre que a dimensão de* T_pM *é igual a* n.

Exercício 6 *Mostre que todo operador auto-adjunto em* $\mathbb{R}^n$ *possui autovetores.*

Exercício 7 *Mostre que toda matriz quadrada suficientemente próxima da identidade* $I_{n\times n}$ *possui raiz quadrada, isto é, se* $A_{n\times n}$ *está próxima de* $I_{n\times n}$, *então existe* $X_{n\times n}$ *tal que* $X^2 = A$.

Exercício 8 *Assumindo válido o Teorema da Função Implícita, demonstre o Teorema da Função Inversa.*