Análise em $\mathbb{R}^n$

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2: Funções contínuas

Exercício 1 *Estude a continuidade das funções abaixo.*

$$f(x) = \begin{cases} sen(x), & se \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \|x\|^2, & se \quad x \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2(y-1)}{5x^2+(y-1)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Exercício 2 *Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua e $E \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos, então $f(E)$ é conexo por caminhos.*

Exercício 3 *Mostre que $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ det(A) \neq 0\}$ é denso em $M_n(\mathbb{R})$.*

Exercício 4 *Mostre que se $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $E_2 \subset \mathbb{R}^m$ são conexos por caminhos, então $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é conexo por caminhos.*

Exercício 5 *Considere $End(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial dos operadores lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

1. *Mostre que a função $N : End(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$N(T) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|T(x)\|$$

define uma norma em $End(\mathbb{R}^n)$;

2. *Considere $Aut(\mathbb{R}^n) \subset End(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das tranformações ivnersíveis. Prove que se $T \in Aut(\mathbb{R}^n)$ e $S \in End(\mathbb{R}^n)$ são tais que*

$$N(S-T)N(T^{-1}) < 1,$$

então $S \in Aut(\mathbb{R}^n)$. Determine se $Aut(\mathbb{R}^n) \subset End(\mathbb{R}^n)$ é aberto, fechado ou nehum desses.

3. *Mostre que a função $Aut(\mathbb{R}^n) \to Aut(\mathbb{R}^n)$ dada por $A \mapsto A^{-1}$ é contínua;*

Exercício 6 *Considere $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ defina a distância entre x E X pondo*

$$dist(x, X) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in X\}$$

1. *Mostre que $\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, X) = 0\}$;*

2. *Porve que a função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto d(x, X)$ é uniformemente contínua. Em particular, um conjunto X é fechado se, e somente se, coincide com o conjunto de zeros de uma função contínua;*

3. *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *fechados e disjuntos. Mostre que a função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{dist(x, A)}{dist(x, A) + dist(x, B)}$$

é contínua, com $f(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$. *Além disso,* $A = f^{-1}(0)$ *e* $C = f^{-1}(1)$.

Exercício 7 *Mostre que não existe* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *contínua e injetora.*

Exercício 8 *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função limitada, um ponto* $a \in A$ *e* $\delta > 0$. *Defina os valores*

$$M(a, f, \delta) \doteq \sup\{f(x);\ x \in\ A\ e\ \ \|x - a\| < \delta\}$$
$$m(a, f, \delta) \doteq \inf\{f(x);\ x \in\ A\ e\ \ \|x - a\| < \delta\}.$$

1. *Mostre que existe o número*

$$o(f, a) \doteq \lim_{\delta \to 0}[M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)]$$

2. *Mostre que* f *é contínua em* a *se, e somente se,* $o(f, a) = 0$.

3. *Se* A *é fechado e* f *limitada, então para cada* $\epsilon > 0$, *o conjunto*

$$S = \{x \in A;\ o(f, a) \geqslant \epsilon\}$$

é fechado.

Exercício 9 *O gráfico de uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é o conjunto*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m};\ x \in A\ e\ y = f(x)\}$$

Suponha que f *é contínua.*

1. *Mostre que* G_f *é fechado;*

2. *Mostre que* A *e* G_f *são homeomorfos;*

3. *Considere* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n$ *a esfera unitária e* $p = (0, \ldots, 1) \in \mathbb{S}^n$. *Mostre que* $\mathbb{S}^n - \{p\}$ *é homeormorfo a* $\mathbb{R}^n$;

Exercício 10 *Sejam* $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *contínuas em* a. *Se* $f(a) \neq g(a)$, *então existe uma bola centrada em* a *na qual* $f(x) \neq f(y)$.

Exercício 11 *O conjunto das matrizes ortogonais com determinate igual a 1 é conexo por caminhos. O conjunto da matrizes ortogonais possui exatamente duas componentes conexas.*

Exercício 12 *Toda função contínua num compacto é uniformemente contínua.*

Exercício 13 *Uma função* $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *é dita bilinear quando:*

- $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$,
- $\varphi(x', y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$,
- $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x, y)$,
- $\varphi(x, \alpha y) = \alpha\varphi(x, y)$,

para todo $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $y, y' \in \mathbb{R}^m$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Mostre que toda aplicação bilinear é de Lipschitz.