

Análise III

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3: Funções diferenciáveis

Exercício 1 Um caminho diferenciável em \mathbb{R}^n é uma função diferenciável $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo I um intervalo.

(a) Mostre que se $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é outro caminho diferenciável, então

$$\frac{d}{dt} \langle f, g \rangle(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0) \rangle + \langle f(t_0), g'(t_0) \rangle.$$

(b) Se $I = [a, b]$ e $\|f'(t)\| \leq M$, então $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$.

(c) Defina $\int_a^b f(t) dt$ pondo

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Supondo f de classe C^1 , mostre que:

(c1) $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$;

(c2) Obtenha outra demonstração para o item (b).

(c3) Por qual motivo estamos supondo f de classe C^1 no item (c1)?

Exercício 2 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$, para cada $v \in \mathbb{R}^n$, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício 3 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em 0.

(a) Se $f(tx) = tf(x)$, para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, então f é linear.

(b) Conclua que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício 4 Considere f uma função complexa $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com A um conjunto aberto.

- escrevendo $\mathbb{C} \ni z = x + iy$, podemos identificar A como um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 ;

- podemos escrever

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

sendo $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- a derivada de f num ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, quando existe, é definida por

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Mostre que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Exercício 5 Suponha $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável. Mostre que se f é Lipschitz, com constante M , então $\|f'(x)\| \leq M$, para todo $x \in A$.

Exercício 6 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $L \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$. Definindo

$$\varphi(x) = \langle T(x) \cdot f(x), g(x) \rangle,$$

obtenha $\varphi'(x) \cdot h$, para $x \in A$ e $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 7 Dizemos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ independe da segunda variável quando, para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x, y_1) = f(x, y_2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Mostre que f independe da segunda variável se, e só se, existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x)$.
- Qual a relação entre as derivadas de f e g ?

Exercício 8 Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$. Mostre que f é diferenciável na origem.

Exercício 9 Obtenha f' nos seguintes casos:

- $f(x, y, z) = x^y$;
- $f(x, y, z) = (x^y, z)$;
- $f(x, y) = \int_a^{x+y} g(t) dt$, sendo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Exercício 10 Estude a diferenciabilidade explicitando $dF(p)$:

- $F(x) = (x, f(x))$, sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável;
- $F(x) = (x, f(y))$, sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável e $x \in \mathbb{R}^m$;

Exercício 11 Considere \mathbb{M}_n o conjunto das matrizes reais de ordem n e a função $f : \mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{M}_n$ dada por

$$f(A) = A^3 + A^2.$$

Determine $Df_{A_0}(H)$, com $H \in \mathbb{M}_n$.

Exercício 12 Considere $A \in \mathbb{M}_3$ como um elemento de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, supondo cada linha $a_i \in \mathbb{R}^3$. Mostre que a aplicação determinante $\det : \mathbb{M}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e obtenha $(\det)'_{A_0}(I)$.

Exercício 13 Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$, então f é constante.

Exercício 14 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável. Mostre que:

(a) $F(x) = \langle f(x), f(x) \rangle$ é diferenciável, explicitando $F'_{x_0}(h)$.

(b) se $\|f(x)\| \equiv 1$, então $\det(f'(x)) \equiv 0$.