CMM222 - Análise III
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

19 DE OUTUBRO

Aula de hoje: Topologia em $\mathbb{R}^n$.

- Conjuntos fechados e sequências.

Espaço euclidiano

- Ao longo do curso utilizaremos a notação $\mathbb{R}^n$ para indicar o espaço euclidiano n-dimensional definido pelo produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo n vezes.
- Os elementos $x \in \mathbb{R}^n$ são, por definição, da forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Consideramos em $\mathbb{R}^n$ a estrutura natural de espaço vetorial:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

- O elementos de $\mathbb{R}^n$ serão chamados de pontos, ou de vetores.
- Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ defini-se o número

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

Norma

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

Norma

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

Norma

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(N3) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Observação (Exercício)

A função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \mathcal{N}(x - y)$ satisfaz

(D1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M$.

(D2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$. (Desigualdade Triangular)

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas (usuais):

$$\text{(euclidiana)}\ \ \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2},$$

$$\text{(soma)}\ \ \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$textrm(mximo)\ \ \|x\|_m = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas (usuais):

$$
\begin{aligned}
\text{(euclidiana)} \quad \|x\| &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}, \\
\text{(soma)} \quad \|x\|_s &= \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \\
textrm(mximo) \quad \|x\|_m &= \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.
\end{aligned}
$$

Teorema (C-S)

Vale a desigualdade

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas (usuais):

$$\text{(euclidiana)} \;\; \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2},$$

$$\text{(soma)} \;\; \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$textrm(mximo) \;\; \|x\|_m = \max_{1\le j\le n} |x_j|.$$

Teorema (C-S)

Vale a desigualdade

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|, \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema (Equivalência)

Vale a desigualdade

$$\|x\|_m \le \|x\| \le \|x\|_s \le n\|x\|_m, \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

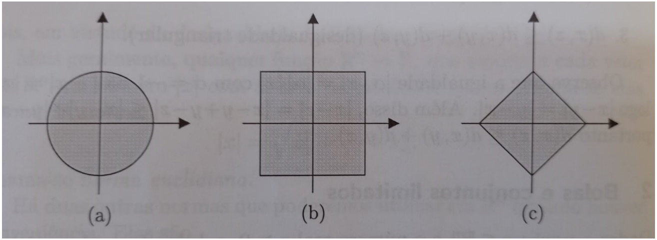
Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $\mathcal{N}$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e $d(x,y) = \mathcal{N}(x-y)$. Temos então os conjuntos

$$\begin{aligned} B(a;r) &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) < r\} \\ B[a;r] &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) \leq r\} \\ S[a;r] &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) = r\} \\ \mathbb{S}^{n-1} &= S[0;1] \end{aligned}$$

Observação

Em $\mathbb{R}^2$, com respeito a norma euclidiana, do máximo e da soma.



Conjuntos abertos

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$.

- Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$.
- O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.
- Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $int(X) = X$.

Observações

- Veremos que ser aberto é uma propriedade que não depende de uma escolha particular da norma.
- Se um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ não é aberto, então existe $p \in X$ tal que $p \notin int(X)$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ temos $B(p, \epsilon) \cap X^C \neq \emptyset$.

Teorema

(a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos, então $A_1 \cap A_2$ também o é.

(b) Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma coleção de conjuntos abertos, então

Conjuntos fechados

Conjuntos fechados

Definição

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado se F^C é aberto.

Conjuntos fechados

Definição

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado se F^C é aberto.

Exemplos:

- $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ são conjuntos fechados;
- A bola fechada é um conjunto fechado.
- $\mathbb{Q}^n$ não é fechado e nem aberto (Exercício).

Conjuntos fechados

Definição

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado se F^C é aberto.

Exemplos:

- $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ são conjuntos fechados;
- A bola fechada é um conjunto fechado.
- $\mathbb{Q}^n$ não é fechado e nem aberto (Exercício).

Teorema

(a) Se F_1 e F_2 são conjuntos fechado, então $F_1 \cup F_2$ também o é.

(b) Se $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma coleção de conjuntos fechados, então $F = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ fechado.

Conjuntos fechados

Definição

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado se F^C é aberto.

Exemplos:

- $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ são conjuntos fechados;
- A bola fechada é um conjunto fechado.
- $\mathbb{Q}^n$ não é fechado e nem aberto (Exercício).

Teorema

(a) Se F_1 e F_2 são conjuntos fechado, então $F_1 \cup F_2$ também o é.

(b) Se $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma coleção de conjuntos fechados, então $F = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ fechado.

Exercício

Determine todos os conjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ simultaneamente abertos e fechados.

Pontos aderentes e de acumulação

Definição

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto.

Pontos aderentes e de acumulação

Definição

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto **aderente** de X se

$$B(p, \epsilon) \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

O conjunto dos pontos de aderência será denotado por $\overline{X}$.

Pontos aderentes e de acumulação

Definição

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto **aderente** de X se

$$B(p, \epsilon) \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

O conjunto dos pontos de aderência será denotado por $\overline{X}$.

(b) Dizemos que p é um ponto de **acumulação** de X se

$$[B(p, \epsilon) \setminus \{p\}] \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

O conjunto dos pontos de aderência será denotado por X'.

Pontos aderentes e de acumulação

Definição

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto.

(a) Dizemos que p é um ponto **aderente** de X se

$$B(p, \epsilon) \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

O conjunto dos pontos de aderência será denotado por $\overline{X}$.

(b) Dizemos que p é um ponto de **acumulação** de X se

$$[B(p, \epsilon) \setminus \{p\}] \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

O conjunto dos pontos de aderência será denotado por X'.

Proposição

(a) $X \subset \overline{X}$ e $X' \subset \overline{X}$.

(b) $\overline{X}$ é fechado.

(c) X é fechado se, e somente se, $X = \overline{X}$.

Sequências convergentes

Sequências convergentes

Definição

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que a cada $k \in \mathbb{N}$ associa um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$. Utilizaremos as notações $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ou, simplesmente, x_k.

Sequências convergentes

Definição

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que a cada $k \in \mathbb{N}$ associa um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$. Utilizaremos as notações $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ou, simplesmente, x_k.

Observação

Se $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}^n$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n}),$$

ou seja, n sequências numéricas $\{x_{k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, n$.

Sequências convergentes

Definição

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que a cada $k \in \mathbb{N}$ associa um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$. Utilizaremos as notações $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ou, simplesmente, x_k.

Observação

Se $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}^n$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n}),$$

ou seja, n sequências numéricas $\{x_{k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}, j = 1, \ldots, n$.

Definição

Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$.

(a) Dizemos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada se existe $M > 0$ tal que $\|x_k\| \leq M, \ \forall k \in \mathbb{N}$.

(b) Dizemos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $p \in \mathbb{R}^n$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - p\| < \epsilon, \ \forall k \geq N.$$

Lema

Lema

(a) O limite de uma sequência, quando existe, é único.

(b) Temos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $p = (p_1, \ldots, p_n)$ se, e somente se, $\{x_{k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para p_j, $j = 1, \ldots, n$.

(c) Se $x_k \to p$ e $y_k \to q$, então $x_k + y_k \to p + 1$.

(d) Se $x_k \to p$, então Se $\|x_k\| \to \|p\|$.

Lema

(a) O limite de uma sequência, quando existe, é único.

(b) Temos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $p = (p_1, \ldots, p_n)$ se, e somente se, $\{x_{k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para p_j, $j = 1, \ldots, n$.

(c) Se $x_k \to p$ e $y_k \to q$, então $x_k + y_k \to p + 1$.

(d) Se $x_k \to p$, então Se $\|x_k\| \to \|p\|$.

Proposição

$p \in X'$ se, e somente se, existe uma sequência de pontos de X que converge para p.