CMM222 - Análise III
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

4 de Abril

Aula de hoje: Conjuntos compactos.

- Teorema de Borel-Lebesgue

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(N3) $\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

- Exemplos:

$$\text{(euclidiana)}\ \ \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2},$$

$$\text{(soma)}\ \ \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$\text{(máximo)}\ \ \|x\|_m = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$

- Valem a desigualdades

$$\|x\|_m \leq \|x\| \leq \|x\|_s \leq n\|x\|_m,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Normas equivalentes

Definição

Duas normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são ditas equivalentes se existem constantes positivas a, b tais que

$$|x| \leq a\|x\| \text{ e } \|x\| \leq b|x|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Observação

A equivalência de normas é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. Em particular, duas normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes, se, e somente se, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1\|x\| \leq |x| \leq C_2\|x\||, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema

Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Topologia de $\mathbb{R}^n$

Definição

- Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$.
- O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.
- Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $int(X) = X$.
- Um conjunto F é dito fechado se F^C é aberto.
- Dizemos que p é um ponto **aderente** a um conjunto X se $B(p, \epsilon) \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0$.
- Dizemos que p é um ponto de **acumulação** de X se $[B(p, \epsilon) \setminus \{p\}] \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0$.

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Toda sequência limitada possui subsequência convergente.

Teorema (Banach)

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é de Cauchy se, e somente se, é convergente.

Conjuntos compactos

Conjuntos compactos

Definição

Dizemos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se é limitado e fechado.

Conjuntos compactos

Definição

Dizemos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se é limitado e fechado.

Proposição (Exercício)

- a união de um número finito de compactos é compacto.
- a interseção de uma família de compactos é compacto.
- se $K \subset \mathbb{R}^m$ e $M \subset \mathbb{R}^n$ são compactos, então $K \times M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é compacto.

Teorema

Um conjunto K é compacto se, e somente se, toda sequência $\{x_k\} \subset K$ possui subsequência que converge para um ponto de K.

Teorema

Um conjunto K é compacto se, e somente se, toda sequência $\{x_k\} \subset K$ possui subsequência que converge para um ponto de K.

Teorema (Cantor)

Dada uma sequência decrescente

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots K_\ell \supset \dots$$

de compactos não vazios, a interseção

$$K = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} K_\ell$$

é compacta e não vazia.

Cobertura aberta

Definição

- Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma família de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda \in L$, tal que
$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda.$$
- Uma subcobertura é uma subfamília $\{C_\mu\}_{\mu \in L'}$, $L' \subset L$.
- Uma cobertura é dita aberta se cada elemento da família é um conjunto aberto.

Cobertura aberta

Definição

- Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma família de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda \in L$, tal que
$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda.$$
- Uma subcobertura é uma subfamília $\{C_\mu\}_{\mu \in L'}$, $L' \subset L$.
- Uma cobertura é dita aberta se cada elemento da família é um conjunto aberto.

Teorema (Lindelöf)

Toda cobertura aberta admite subcobertura enumerável.

Teorema de Borel-Lebesgue

Teorema (Borel-Lebesgue)

Um conjunto K é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita.

Teorema de Borel-Lebesgue

Teorema (Borel-Lebesgue)

Um conjunto K é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita.

Aplicação (Exercício)

Seja $K = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} K_\ell$ uma interseção de uma sequência decrescente $K_1 \supset K_2 \supset \ldots K_\ell \supset \ldots$ de conjuntos compactos. Se um aberto U contém K, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $K_j \subset U$.