CMM222 - Análise III
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

11 de Abril

Aula de hoje: Funções contínuas.

FUNÇÕES CONTÍNUAS

Funções contínuas

Observação

Dados $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma função, existem funções $f_j : X \to \mathbb{R}, j = 1, 2, l \ldots, n$ tai que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

Funções contínuas

Observação

Dados $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma função, existem funções $f_j : X \to \mathbb{R}, j = 1, 2, l \ldots, n$ tai que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

Definição

Uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$ é dita contínua num ponto $a \in X \subset \mathbb{R}^m$ se vale: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \ \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Funções contínuas

Observação

Dados $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma função, existem funções $f_j : X \to \mathbb{R}, j = 1, 2, l \ldots, n$ tai que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

Definição

Uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$ é dita contínua num ponto $a \in X \subset \mathbb{R}^m$ se vale: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Observação

A continuidade de f em a equivale a dizer que, seja qual for a bola $B(f(a), \epsilon)$, deve existir $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \epsilon).$$

Exemplos

EXEMPLOS

- Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $Y \subset X$, então $f|_Y$ é contínua.

EXEMPLOS

- Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $Y \subset X$, então $f|_Y$ é contínua.
- Se $a \in X$ é ponto isolado, então toda função $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a.

Exemplos

- Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $Y \subset X$, então $f|_Y$ é contínua.
- Se $a \in X$ é ponto isolado, então toda função $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a.
- Toda função Lipschitz é contínua, isto é, uma função para a qual existe $k > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Exemplos

- Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $Y \subset X$, então $f|_Y$ é contínua.
- Se $a \in X$ é ponto isolado, então toda função $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a.
- Toda função Lipschitz é contínua, isto é, uma função para a qual existe $k > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

- Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua.

EXEMPLOS

- Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $Y \subset X$, então $f|_Y$ é contínua.
- Se $a \in X$ é ponto isolado, então toda função $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a.
- Toda função Lipschitz é contínua, isto é, uma função para a qual existe $k > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

- Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua.
- Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, as projeções $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, \ldots, x_n) = x_j.$$

são contínuas.

Isometria

Isometria

Definição

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **imersão isométrica** se

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \; \forall x, y \in X.$$

Isometria

Definição

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **imersão isométrica** se

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Exemplo

Para $m < n$ temos a imersão isométrica $f : v\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Isometria

Definição

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **imersão isométrica** se

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Exemplo

Para $m < n$ temos a imersão isométrica $f : v\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Isometria

Uma imersão isométrica $f : X \to Y = f(X)$ é dita isometria de X sobre Y.

Isometria

Definição

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **imersão isométrica** se

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Exemplo

Para $m < n$ temos a imersão isométrica $f : v\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Isometria

Uma imersão isométrica $f : X \to Y = f(X)$ é dita isometria de X sobre Y.

Exemplo

Fixado $a \in \mathbb{R}^n$, temos a translação $T_a\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$T_a(x) = x + a.$$

Teorema

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}^k$. Se f é contínua em a e g contínua em $b = f(a)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em a.

Teorema

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}^k$. Se f é contínua em a e g contínua em $b = f(a)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em a.

Teorema

Uma função $f : X \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em a se, e somente se, cada função coordenada $f_j : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

Teorema

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}^k$. Se f é contínua em a e g contínua em $b = f(a)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em a.

Teorema

Uma função $f : X \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em a se, e somente se, cada função coordenada $f_j : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

Corolário

Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ e $g : X \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ funções contínuas. Então é contínua a aplicação $(f, g) : X \to \mathbb{R}^{m+n}$ dada por $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$.

Teorema

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}^k$. Se f é contínua em a e g contínua em $b = f(a)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em a.

Teorema

Uma função $f : X \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em a se, e somente se, cada função coordenada $f_j : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

Corolário

Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ e $g : X \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ funções contínuas. Então é contínua a aplicação $(f,g) : X \to \mathbb{R}^{m+n}$ dada por $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$.

Teorema

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. São contínuas:

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$
- $\langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$
- $(1/\alpha)(x) = 1/\alpha(x)$, se $0 \notin \alpha(X)$.

Continuidade e sequências

Teorema

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua em a se, e somente se, para toda sequência $\{x_j\} \subset X$ tal que $x_j \to a$ tivermos $f(x_j) \to f(a)$.