CMM222 - Análise III
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

13 de Abril

Aula de hoje: Funções contínuas e topologia.

FUNÇÕES CONTÍNUAS

DEFINIÇÃO

Uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$ é dita contínua num ponto $a \in X \subset \mathbb{R}^m$ se vale: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon,$$

ou equivalentemente,

$$f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \epsilon).$$

Propriedades topológicas

Propriedades topológicas

Teorema 1

Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $K \subset X$ é um compacto, então $f(K)$ é compacto.

Propriedades topológicas

Teorema 1

Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $K \subset X$ é um compacto, então $f(K)$ é compacto.

Corolário (Weierstrass)

Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset X$ é um compacto, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \ \forall x \in K.$$

Propriedades topológicas

Teorema 1

Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $K \subset X$ é um compacto, então $f(K)$ é compacto.

Corolário (Weierstrass)

Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset X$ é um compacto, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \ \forall x \in K.$$

Teorema 2

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função. Temos que f é contínua em X se, e somente se, para todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ tivermos que $f^{-1}(A)$ é um aberto de X.

Propriedades topológicas

Teorema 1

Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $K \subset X$ é um compacto, então $f(K)$ é compacto.

Corolário (Weierstrass)

Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset X$ é um compacto, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \ \forall x \in K.$$

Teorema 2

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função. Temos que f é contínua em X se, e somente se, para todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ tivermos que $f^{-1}(A)$ é um aberto de X.

Teorema 3

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função. Temos que f é contínua em X se, e somente se, para todo fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ tivermos que $f^{-1}(A)$ é um fechado de X.

Exercícios

1. Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma função definida no aberto $X \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que f é contínua se, e somente se, para todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ tivermos que $f^{-1}(A)$ é um aberto de $\mathbb{R}^m$.
2. Repita o item anterior trocando aberto por fechado.
3. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X;\ f(x) < g(x)\}, \\ B &= \{x \in X;\ f(x) \leq g(x)\}, \\ C &= \{x \in X;\ f(x) = g(x)\}. \end{aligned}$$

   (a) Mostre que A é aberto de X, enquanto que B, C são fechados de X.
   (b) Interprete o item anterior no caso g constante.

Continuidade uniforme

Definição

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita uniformemente contínua em X se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon, \ \forall x, y \in X.$$

Continuidade uniforme

Definição

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita uniformemente contínua em X se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon, \ \forall x, y \in X.$$

Teorema 4

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita uniformemente contínua em X se, e somente se,

Continuidade uniforme

Definição

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita uniformemente contínua em X se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon, \ \forall x, y \in X.$$

Teorema 4

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita uniformemente contínua em X se, e somente se,

Exercício

1. Toda função Lipschitz é uniformemente contínua
2. Se $f : K \to \mathbb{R}^n$ é contínua e K é compacto, então f é uniformemente contínua em K.

Função distância

Função distância

Definição

Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ definimos

$$d(a, X) = \inf\{\|x - a\|,\ \forall x \in X\}$$

Função distância

Definição

Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ definimos

$$d(a, X) = \inf\{\|x - a\|, \ \forall x \in X\}$$

Exercício

1. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Dado $a \in \mathbb{R}^n$, mostre que existe $x_0 \in F$ tal que

$$\|x - x_0\| \leq \|x - a\|, \ \forall x \in F.$$

2. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = d(x, A).$$

Mostre que f é função Lipschitz com $k = 1$

Continuidade e conexidade

Continuidade e conexidade

Teorema 5

Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é conexo e $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então $f(X)$ é conexo.

Continuidade e conexidade

Teorema 5

Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é conexo e $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então $f(X)$ é conexo.

Corolário

(a) O produto cartesiano $X \times Y \times \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, X e Y são conexos.

(b) Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(X)$ é um intervalo.

Observação

O item (b) acima é o Teorema do Valor intermediário: Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Se $a, b \in X$ são tais que $f(a) < f(b)$, então dado $f(a) < d < f(b)$, existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.

Teorema da Alfândega

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto. Se um conexo $C \subset \mathbb{R}^n$ contém um ponto $a \in X$ e um ponto $b \in X^c$, então C contém um ponto $c \in \partial X$, em que

$$\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n; B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset \text{ e } B(x, \epsilon) \cap X^c \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0\}.$$

Homeomorfismo

Definição

Dois conjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são ditos homeomorfos se existe bijeção contínua $f : X \to Y$ cuja inversa também é contínua.

Exercício

Mostre que, em $\mathbb{R}^n$, a relação $X \sim Y \doteq X$ é homeomorfo a Y é uma relação de equivalência.

Exemplos

- A aplicação $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$, dada por $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ não é um homeomorfismo.
- $B(0, 1)$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.
- Considere $\mathbb{S}^n$ e $N = (0, \ldots, 0, 1)$. A **projeção estereográfica** $\xi : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, em que $\xi(x)$ é o ponto no qual a semi-reta $\overrightarrow{Nx}$ corta o hiperplano $x_{n+1} = 0$.