MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

27 de Abril

Aula de hoje: Forma de Jordan e exponencial de matrizes

Exponencial de matrizes

Definição

Definimos a exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ pondo $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

Proposição 1

(a) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$, sendo a convergência da série uniforme em cada intervalo compacto.

(b) $\dfrac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, com $e^0 = I$;

(c) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(d) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(e) Se $BC = CA$, então $e^{tB}C = Ce^{tA}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(f) Se $AB = BA$, então $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, valendo a recíproca.

(g) Se $A \sim_Q B$, então $e^A = Qe^BQ^{-1}$. Em particular, para $B = diag(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, temos

$$e^A = Qdiag(e^{\kappa_1}, \ldots, e^{\kappa_n})Q^{-1}.$$

(h) Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = diag(A_1, \ldots, A_m)$, então

$$e^A = diag(e^{A_1}, \ldots, e^{A_2}).$$

(i) Se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

(j) Se existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $E^\ell = 0$ e $E^{\ell-1} \neq 0$, então $e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \dfrac{E^k}{k!}$.

(k) Considere $\lambda \in \mathbb{R}$, $J(\lambda) = \lambda I + E$, sendo

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } e^{tJ(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t}{2} & \ldots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Blocos de Jordan

- Para um número real λ definimos por $J_\lambda(\ell) \in M(\ell)$ o **bloco de Jordan real** e tamanho ℓ.
- Para um número complexo $\gamma = a + ib$ definimos por $J_{a,b}(\ell) \in M(2\ell)$ o **bloco de Jordan coplexo** e tamanho 2ℓ.
- Temos então:

$$J_\lambda(\ell) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}, J_{a,b}(\ell) = \begin{bmatrix} J_{a,b} & \mathit{0} & \dots & \mathit{0} & \mathit{0} \\ I & J_{a,b} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \mathit{0} & I & J_{a,b} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathit{0} & \dots & \mathit{0} & I & J_{a,b} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\mathit{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Forma Canônica de Jordan

Teorema (Forma Canônica de Jordan)

Se $A \in M(n)$, então $A \sim_Q J$ em que

$$J = diag(J_1, J_2, \ldots, J_r) \in M(n),$$

sendo que cada J_i é um bloco de Jordan, real ou complexo. A matriz J é única, a menos da ordem dos blocos na diagonal.

Note então que

$$e^A \sim e^J = diag\left(e^{J_1}, e^{J_2}, \ldots, e^{J_r}\right)$$

e que para $J_{a,b}$ temos

$$e^{J_{a,b}} = \begin{bmatrix} e^a \cos(b) & e^a \sin(b) \\ -e^a \sin(b) & e^a \cos(b) \end{bmatrix}.$$

Exemplo

- Os autovalores da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$
são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2 + i$ e $\lambda_3 = -2 - i$, logo
$$J_1(1) = [1],\ J_{-2,1}(1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
- Assim,
$$e^A \sim \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2}\cos(1) & e^{-2}\sin(1) \\ 0 & -e^{-2}\sin(1) & e^{-2}\cos(1) \end{pmatrix}.$$

EXPONENCIAIS DE BLOCOS: BLOCO DE JORDAN REAL

- Para um bloco real $J_\lambda(\ell)$ temos que

$$J_\lambda(\ell) = \lambda I_{\ell\times\ell} + G_1(\ell),$$

  com $G_1(\ell)^\ell = 0$.

- Uma vez que $\lambda I_{\ell\times\ell}$ comuta com $G_1(\ell)$, então

$$\begin{aligned} e^{J_\lambda(\ell)} &= e^{\lambda I} e^{G_1(\ell)} \\ &= e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(\ell-1)!} & \frac{1}{(\ell-2)!} & \frac{1}{(\ell-3)!} & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M(\ell). \end{aligned}$$

Exponenciais de blocos: bloco de Jordan complexo

- Escreva $J^0_\lambda(\ell) = diag(J_{a,b}, J_{a,b}, \ldots, J_{a,b}) \in M(2\ell)$ e

$$G_{c,I}(\ell) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ cI & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & cI & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & cI & 0 \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

- Temos então $J_{a,b}(\ell) = J^0_\lambda(\ell) + G_{1,I}(\ell)$. Uma vez que $G^\ell_{1,I}(\ell) = 0$, então

$$e^{G_{c,I}(\ell)} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ cI & I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!}I & cI & I & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!}I & \frac{c^2}{2!}I & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \ddots & 0 \\ \frac{c^{\ell-1}}{(\ell-1)!}I & \frac{c^{\ell-2}}{(\ell-2)!}I & \frac{c^{\ell-3}}{(\ell-3)!}I & \ldots & cI & I \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

- Note que $e^{J_{a,b}} = e^a R_b$, sendo

$$R_b = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}.$$

- Assim,

$$e^{J^0_{a,b}(\ell)} = e^a diag\left(R_b, R_b, \ldots, R_b\right).$$

- Agora, temos que $J^0_{a,b}(\ell)$ comuta com $G_{1,I}(\ell)$, donde $e^{J_{a,b}} = e^{J^0_{a,b}(\ell)} e^{G_{1,I}(\ell)}$ e então

$$e^{J_{a,b}} = \begin{bmatrix} R_b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ R_b & R_b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!}R_b & R_b & R_b & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!}R_b & \frac{1}{2!}R_b & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(\ell-1)!}R_b & \frac{1}{(\ell-2)!}R_b & \frac{1}{(\ell-3)!}R_b & \ldots & R_b & R_b \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

são $\lambda_{1,2,3} = -1$, $\lambda_4 = -2+i$ e $\lambda_5 = -2-i$, logo

$$J_{-1}(3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } J_{-2,1}(1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Assim,

$$e^A \sim \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-1} & e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^{-1}}{2} & e^{-1} & e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2}\cos(1) & e^{-2}\sin(1) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2}\sin(1) & e^{-2}\cos(1) \end{pmatrix}.$$

SOLUÇÕES DE $x' = Ax$

- Note que a solução do problema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é então

$$x(t) = e^{At}x_0 = Qe^{Jt}Q^{-1}x_0 = Qdiag\left(e^{J_1t}, e^{J_2t}, \dots, e^{J_rt}\right)Q^{-1}x_0$$

- Para um bloco real $J_\lambda(\ell)$ temos $e^{tJ_\lambda(\ell)} = e^{\lambda tI}e^{G_t(\ell)}$, sendo

$$e^{G_t(\ell)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{c^{\ell-1}}{(\ell-1)!} & \frac{t^{\ell-2}}{(\ell-2)!} & \frac{t^{\ell-3}}{(\ell-3)!} & \dots & t & 1 \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

- Para um bloco complexo teremos $tJ_{a,b} = J_{ta,tb}$, donde

$$e^{tJ_{a,b}} = e^{J_{ta,tb}} = e^{at}R_{tb}$$

- Assim:

$$e^{tJ_{a,b}(\ell)} = e^{at}\begin{bmatrix} R_{bt} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_{bt} & R_{bt} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!}R_{bt} & R_{bt} & R_{bt} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!}R_{bt} & \frac{t^2}{2!}R_{bt} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{t^\ell - 1}{(\ell-1)!}R_{bt} & \frac{t^{\ell-2}}{(\ell-2)!}R_{bt} & \frac{t^{\ell-3}}{(\ell-3)!}R_{bt} & \dots & R_{bt} & R_{bt} \end{bmatrix},$$

sendo

$$R_{bt} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Exemplo

- Para o sistema $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, com

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

teremos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 = Qe^{tJ}Q^{-1}x_0 \\ &= Q \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{-t} & te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t}\cos(t) & e^{-2t}\sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2t}\sin(t) & e^{-2t}\cos(t) \end{pmatrix} Q^{-1}x_0 \end{aligned}$$

Teorema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \;\text{ e }\; t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A.

Sistemas dinâmicos (uma ligeira ideia)

- Um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijetiva, diferenciável com inversa diferenciável. Denotemos por $\mathrm{Dif}(n)$ o conjunto dos difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$.
- Note que $\mathrm{Dif}(n)$ é um grupo com a composição de funções.

Definição

Um **sistema dinâmico** agindo sobre $\mathbb{R}^n$ é um homomorfismo de grupos $\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{Dif}(n)$, ou seja, uma aplicação tal que

$$\Phi(t+s) = \Phi(t) \circ \Phi(s), \ \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que a família $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um **grupo a um parâmetro** de difeomorfismos.

Exemplo

Dada uma matriz $A \in M(n)$, temos que

$$\Phi(t) = e^{tA}, \ t \in \mathbb{R},$$

é um sistema dinâmico.

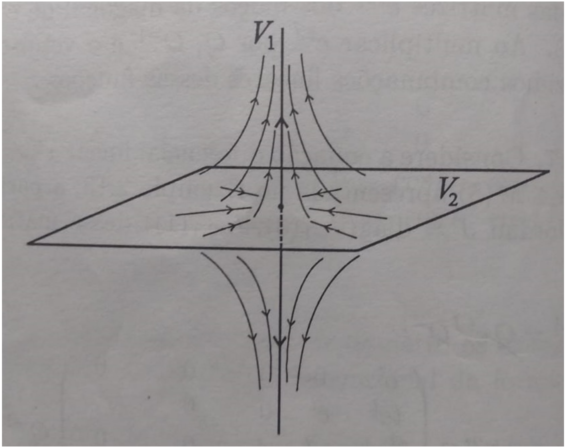
Retrato de fase 3×3

- Considere um sistema $x' = Ax$, com $A \in M(3)$, de modo que a forma de Jordan de A possua dois blocos $J_1 = [1]$ e J_2 de tamanho 2×2. Pelo que vimos, temos

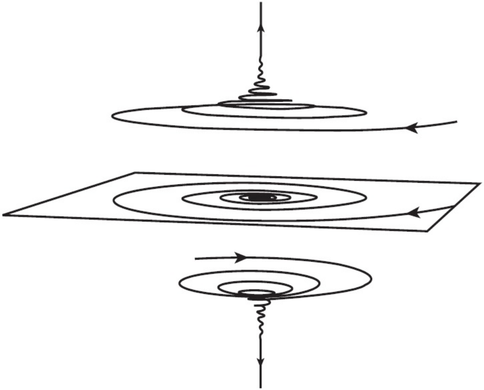
$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{tJ_2}. \end{bmatrix}.$$

- Denote por V_1 o auto-espaço gerado pelo autovalor $\lambda_1 = 1$ e por V_2 aquele gerados pelo(s) autovalor(es) em J_2.
- Note que em V_1 teremos as soluções indo para $+\infty$, quando $t \to \infty$.
- Vamos analisar algumas possibilidades de retrato de fase...

Caso 1: autovalores reais e negativos



Caso 2: autovalores imaginários com $a < 0$



Caso 3: autovalores imaginários puros

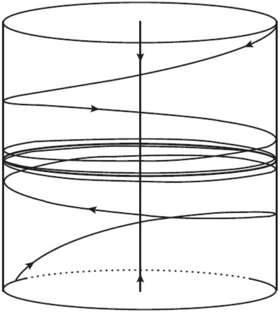


Figura: $\lambda_1 = -1$