MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

4 de Maio

Aula de hoje: Atratores Lineares

Teorema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A.

Teorema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A.

Corolário

Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ são tais que

- sendo reais são negativos, ou
- sendo complexos tem parte real negativa,

então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a 0, quanto $t \to \infty$.

Teorema

Seja $A \in M(n)$ uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de $x' = Ax$ é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \;\; \text{e} \;\; t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com $0 \leq j \leq n-1$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A.

Corolário

Se todos os autovalores de uma matriz $A \in M(n)$ são tais que

- sendo reais são negativos, ou
- sendo complexos tem parte real negativa,

então qualquer solução de $x' = Ax$ tende a 0, quanto $t \to \infty$.

Vale a recíproca!

- Se A possui um autovalor real positivo, ou imaginário com parte real positiva, então existe uma solução de $x' = Ax$ que não converge para zero quando $t \to \infty$.

Exemplo

- Para o sistema $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, com

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 2 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

teremos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 = Qe^{tJ}Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{-t} & te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t}\cos(t) & e^{-2t}\sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2t}\sin(t) & e^{-2t}\cos(t) \end{pmatrix} Q^{-1}x_0 \end{aligned}$$

Atratores

Definição

Considere um campo linear em $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, com $A \in M(n)$.

- Dizemos que a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um **poço** para A se, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0.$$

  Neste caso, $e^{tA} \to 0$ em M(n), quando $t \to \infty$.

- Dizemos que A é um campo atrator se todos os autovalores de A tem parte real negativa.

Atratores

Definição

Considere um campo linear em $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, com $A \in M(n)$.

- Dizemos que a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um **poço** para A se, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale
$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0.$$
Neste caso, $e^{tA} \to 0$ em M(n), quando $t \to \infty$.
- Dizemos que A é um campo atrator se todos os autovalores de A tem parte real negativa.

Proposição (1)

A origem é um poço de A se, e somente se, A é um atrator.

Coeficientes de polinômios característicos

Proposição (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

Coeficientes de polinômios característicos

Proposição (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

- Se $a_4 = 1$, então as todas raízes de p tem parte real negativa se, e somente se,

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_3a_2a_1 > a_3^2 + a_1^2.$$

Coeficientes de polinômios característicos

Proposição (2)

Considere o polinômio

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

- Se $a_4 = 1$, então as todas raízes de p tem parte real negativa se, e somente se,

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_3a_2a_1 > a_3^2 + a_1^2.$$

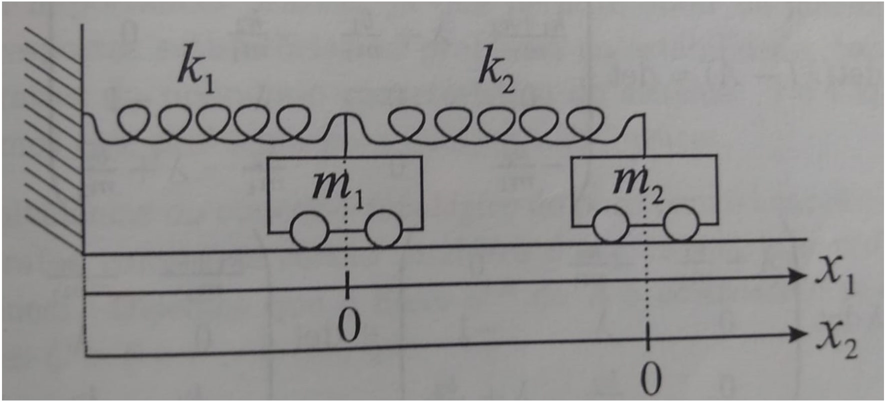
- Se $a_4 = 0$ e $a_3 = 1$, então todas as raízes de p tem parte real negativa se, e somente se,

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_2a_1 > a_0.$$

- Procurar: Routh-Hurwitz

Molas acopladas

- Considere um sistema com duas molas e dois carrinhos (se deslocando horizontalmente) como na figura e assuma que exista atrito.



- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{b_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1x_1'' = -(k_1+k_2)x_1 - b_1x_1' + k_2x_2 \\ m_2x_2'' = -k_2x_1 - k_2x_2 - b_2x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & -\dfrac{b_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- O polinômio característico da matriz deste sistema é

$$p(x) = x^4 + \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2}\right)x^3 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1b_2}{m_1m_2}\right)x^2 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\frac{b_2}{m_2} + \frac{b_1k_2}{m_1m_2}\right)x + \frac{k_1k_2}{m_1m_2}.$$

- Denotando por x_1 e x_2 a posição dos carrinhos 1 e 2, respectivamente, obtemos o sistema

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -(k_1+k_2)x_1 - b_1 x_1' + k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_1 - k_2 x_2 - b_2 x_2' \end{cases}$$

- Escrevendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$ temos o sistema

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & -\dfrac{b_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} y(t).$$

- O polinômio característico da matriz deste sistema é

$$p(x) = x^4 + \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2}\right)x^3 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right)x^2 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\frac{b_2}{m_2} + \frac{b_1 k_2}{m_1 m_2}\right)x + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}.$$

- Mostra-se que tal polinômio satisfaz as condições na Proposição (2), donde o sistema é atrator.
- O movimento do sistema tende ao repouso.

Fluxo contrativos

Definição

Dizemos que o fluxo $\phi(t,x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Fluxo contrativos

Definição

Dizemos que o fluxo $\phi(t,x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição(3)

Sejam $A \in M(n)$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Se a parte real de cada autovalor de A é menor do que β, então existe $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{t\beta},\ \forall t \geq 0.$$

Fluxo contrativos

Definição

Dizemos que o fluxo $\phi(t,x) = e^{tA}x$ de um campo linear A é contrativo se existem constantes $C > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\|, \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição(3)

Sejam $A \in M(n)$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Se a parte real de cada autovalor de A é menor do que β, então existe $C \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{t\beta},\ \forall t \geq 0.$$

Teorema

Seja $x \mapsto Ax$ um campo linear em $\mathbb{R}^n$. São equivalentes:

(a) A origem é um poço para A.;

(b) A é um atrator;

(c) O fluxo de A é contrativo.