

# MATE 7010

## Equações Diferenciais Ordinárias

### S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva  
Dep. de Matemática - UFPR



**11 DE MAIO**

Aula de hoje: Estabilidade de singularidades

## TRAJETÓRIA (ÓRBITA)

### DEFINIÇÃO

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto  $x \in \mathcal{A}$  a solução maximal  $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  da equação  $x' = f(x)$  com condição inicial  $x(0) = x$ . Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de  $x$ .

### PROPOSIÇÃO (2)

Seja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^1$  no aberto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

## CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

### DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma  $x' = f(x)$  são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe  $T > 0$  tal que  $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Neste caso, dizemos que  $x$  é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:**  $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$ , para todo  $t \neq s$ . Neste caso, dizemos que  $x$  é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária:**  $\phi(t, x) = x$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Neste caso, dizemos que  $x$  é um ponto estacionário.

### OBSERVAÇÃO

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que  $x \in \mathcal{A}$  é estacionário se, e somente se,  $f(x) = 0$ .
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

## ESTABILIDADE (LIAPUNOV)

- No que segue,  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  denota um campo de classe  $C^1$  no aberto  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Também assumiremos que o fluxo  $\phi(t, x)$  está definido em  $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$ .

### DEFINIÇÃO

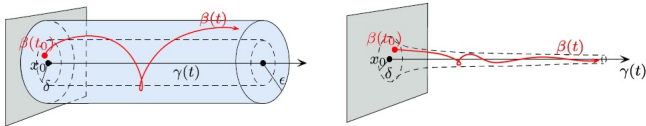
Seja  $x_0$  um ponto de equilíbrio do campo  $f$ .

- diz-se que  $x_0$  é **estável** se, para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \implies \|\phi(t, x) - x_0\| \leq \epsilon, \quad t \geq 0.$$

- diz-se que  $x_0$  é **assintoticamente estável** se é estável e  $\delta$  pode ser escolhido de modo que para todo  $x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_r(x_0)}$  tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0.$$



## EXEMPLOS

- A origem é um **equilíbrio estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2, -x_1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T \end{aligned}$$

- A origem é um **equilíbrio assintoticamente estável** do campo linear

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2, -\omega^2 x_1 - 2ax_2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2)^T, \quad 0 < a < \omega. \end{aligned}$$

- A origem é um equilíbrio **assintoticamente estável** do campo **não linear**

$$f(x_1, x_2) = (-x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1))$$

## ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

### TEOREMA

Seja  $x \mapsto Ax$  um campo linear em  $\mathbb{R}^n$ . São equivalentes:

- (a) A origem é um poço para  $A$ ;
- (b)  $A$  é um atrator;
- (c) O fluxo de  $A$  é contrativo;
- (d) A origem é uma singularidade assintoticamente estável de  $A$ ;

## CAMPOS NÃO LINEARES: PÊNDULO SIMPLES COM ATRITO

- Considere o campo

$$f(\theta, \omega) = (\omega, -g \sin(\theta) - k\omega), \quad k > 0,$$

cujas singularidades são os pontos  $(\ell\pi, 0)$ , com  $\ell \in \mathbb{Z}$  par.



## TEOREMA DE LIAPUNOV

### NOTAÇÕES

Seja  $x_0 \in \mathcal{A}$  uma singularidade do campo  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  no aberto  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- Denotamos por  $Df(x_0)$  a derivada de  $f$  em  $x_0$ .
- Dizemos que  $x_0$  é um **poço** de  $f$  se todos os autovalores de  $Df(x_0)$  tem parte real negativa. Ou seja, se  $x_0$  é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \text{ sendo } A = Df(x_0).$$

### TEOREMA (LIAPUNOV)

Seja  $x_0 \in \mathcal{A}$  uma singularidade do campo  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  no aberto  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se  $x_0$  é um poço de  $f$ , então  $x_0$  é uma singularidade assintoticamente estável para  $f$ .

### EXEMPLO: MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL COM COMPETIÇÃO

- Para tais modelos, temos

$$x' = ax - bx^2, \quad a, b > 0.$$