MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

25 de Maio

Aula de hoje: Estabilidade - Funções de Liapunov

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

Estabilidade (Liapunov)

- No que segue, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ denota um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Também assumiremos que o fluxo $\phi(t, x)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Definição

Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo f.

- Dizemos que x_0 é **estável** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_\delta(x_0)} \implies \|\phi(t, x) - x_0\| \leq \epsilon, \;\; t \geq 0.$$

Topologicamente: dada qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, tal que $W \subset \mathcal{A} \cap U$ e

$$\phi(t, x) \in U, \; \forall x \in W \;\text{ e }\; \forall t \geq 0.$$

- Diz-se que x_0 é **assintoticamente estável** se é estável e δ pode ser escolhido de modo que para todo $x \in \mathcal{A} \cap \overline{B_r(x_0)}$ tem-se

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t, x) = x_0.$$

- Dizemos que x_0 é **instável** se não é estável.

Teorema de Liapunov

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Denotamos por $Df(x_0)$ a derivada de f em x_0.
- Dizemos que x_0 é um **poço** de f se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real negativa. Ou seja, se x_0 é um poço do campo linear

$$y' = Ay, \quad \text{sendo} \quad A = Df(x_0).$$

Teorema

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ uma singularidade do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) Se x_0 é um poço de f, então x_0 é uma singularidade assintoticamente estável para f.

(b) Se $Df(x_0)$ possui algum autovalor com parte real positiva, então x_0 é uma singularidade instável para f.

Função de Liapunov

Definição

Sejam $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, e $V : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $x_0 \in U$.

- Para cada $x \in U$, defina

$$\dot{V}(x) \doteq \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \frac{d}{dt} V(\phi(t,x)) \Big|_{t=0}$$

Função de Liapunov

Definição

Sejam $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, e $V : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $x_0 \in U$.

- Para cada $x \in U$, defina

$$\dot{V}(x) \doteq \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \frac{d}{dt} V(\phi(t,x)) \Big|_{t=0}$$

Dizemos que V é uma função de Liapunov para x_0 se:

(i) $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0$, para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$;

(ii) $\dot{V}(x) \leq 0$, para todo $x \in U$. Ou seja, V decresce ao longo das trajetórias de f

Função de Liapunov

Definição

Sejam $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, e $V : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $x_0 \in U$.

- Para cada $x \in U$, defina

$$\dot{V}(x) \doteq \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \frac{d}{dt} V(\phi(t,x)) \Big|_{t=0}$$

Dizemos que V é uma função de Liapunov para x_0 se:

(i) $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0$, para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$;

(ii) $\dot{V}(x) \leq 0$, para todo $x \in U$. Ou seja, V decresce ao longo das trajetórias de f

Se, além disso, valer

(iii) $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$,

então diremos que V é uma função de Liapunov estrita.

Teoremas de Liapunov

Teorema 1

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Se existe uma função de Lipaunov para f em x_0, então x_0 é estável.

Teorema 2

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Se existe uma função de Lipaunov **estrita** para f em x_0, então x_0 é **assintoticamente estável**.

Teoremas de Liapunov

Teorema 1

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Se existe uma função de Lipaunov para f em x_0, então x_0 é estável.

Teorema 2

Seja $x_0 \in \mathcal{A}$ um equilíbrio do campo $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Se existe uma função de Lipaunov **estrita** para f em x_0, então x_0 é **assintoticamente estável**.

- Note que este método não exige calcular as soluções da equação!!!!
- O preço: obter funções de Liapunov!!!!

EXEMPLO ABSTRATO

Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = (\epsilon x + 2y)(z+1) \\ y' = (-x + \epsilon y)(z+1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

sendo ϵ uma constante qualquer.

EXEMPLO ABSTRATO

Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = (\epsilon x + 2y)(z+1) \\ y' = (-x + \epsilon y)(z+1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

sendo ϵ uma constante qualquer.

- Note que a origem é o único equilíbrio desse sistema;

Exemplo abstrato

Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = (\epsilon x + 2y)(z+1) \\ y' = (-x + \epsilon y)(z+1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

sendo ϵ uma constante qualquer.

- Note que a origem é o único equilíbrio desse sistema;
- Para $\epsilon > 0$ temos equilíbrio instável;

Exemplo abstrato

Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = (\epsilon x + 2y)(z+1) \\ y' = (-x + \epsilon y)(z+1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

sendo ϵ uma constante qualquer.

- Note que a origem é o único equilíbrio desse sistema;
- Para $\epsilon > 0$ temos equilíbrio instável;
- Para $\epsilon \leq 0$ não podemos aplicar os resultados anteriores.

EXEMPLO ABSTRATO

Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = (\epsilon x + 2y)(z+1) \\ y' = (-x + \epsilon y)(z+1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

sendo ϵ uma constante qualquer.

- Note que a origem é o único equilíbrio desse sistema;
- Para $\epsilon > 0$ temos equilíbrio instável;
- Para $\epsilon \leq 0$ não podemos aplicar os resultados anteriores.
- Vamos buscar uma função de Liapunov do tipo

$$V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

Exemplo: Pêndulo

- Considere um pêndulo construído com uma haste de comprimento ℓ na qual está presa uma bola de massa m.

Exemplo: Pêndulo

- Considere um pêndulo construído com uma haste de comprimento ℓ na qual está presa uma bola de massa m.
- Denotando por $\theta(t)$ a posição dessa bola num dado instante t obtemos a equação

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\ell\frac{d\theta}{dt} + mg\sin(\theta) = 0$$

para um certo $b \geq 0$. (Quando $b = 0$ então não existe amortecimento).

EXEMPLO: PÊNDULO

- Considere um pêndulo construído com uma haste de comprimento ℓ na qual está presa uma bola de massa m.
- Denotando por $\theta(t)$ a posição dessa bola num dado instante t obtemos a equação

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\ell\frac{d\theta}{dt} + mg\sin(\theta) = 0$$

para um certo $b \geq 0$. (Quando $b = 0$ então não existe amortecimento).
- Assumindo, por simplicidade $m = g = \ell = 1$ e introduzindo $v = \dfrac{d\theta}{dt}$ chegamos no sistema

$$\begin{cases} \theta' = v \\ v' = -bv - \sin(\theta) \end{cases}$$

EXEMPLO: PÊNDULO

- Considere um pêndulo construído com uma haste de comprimento ℓ na qual está presa uma bola de massa m.
- Denotando por $\theta(t)$ a posição dessa bola num dado instante t obtemos a equação

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\ell\frac{d\theta}{dt} + mg\sin(\theta) = 0$$

  para um certo $b \geq 0$. (Quando $b = 0$ então não existe amortecimento).
- Assumindo, por simplicidade $m = g = \ell = 1$ e introduzindo $v = \dfrac{d\theta}{dt}$ chegamos no sistema

$$\begin{cases} \theta' = v \\ v' = -bv - \sin(\theta) \end{cases}$$

- A função

$$E(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 + 1 - \cos(\theta)$$

  é uma função de Liapunov (não estrita) para a origem.

Retrato de fase

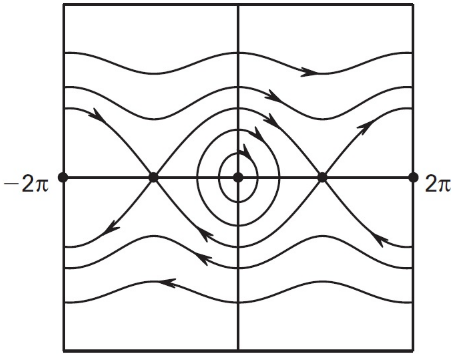

Figura: Pêndulo sem atrito

Retrato de fase

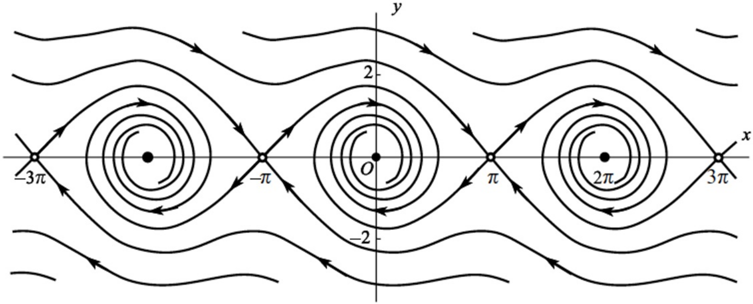

Figura: Pêndulo com atrito