

# MATE 7010

## Equações Diferenciais Ordinárias

### S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva  
Dep. de Matemática - UFPR



**1 DE JUNHO**

Aula de hoje: Conjuntos Limites

## TRAJETÓRIA (ÓRBITA)

### DEFINIÇÃO

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto  $x \in \mathcal{A}$  a solução maximal  $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$  da equação  $x' = f(x)$  com condição inicial  $x(0) = x$ . Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de  $x$ .

### PROPOSIÇÃO (2)

Seja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^1$  no aberto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

## CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

### DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma  $x' = f(x)$  são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe  $T > 0$  tal que  $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Neste caso, dizemos que  $x$  é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:**  $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$ , para todo  $t \neq s$ . Neste caso, dizemos que  $x$  é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária:**  $\phi(t, x) = x$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Neste caso, dizemos que  $x$  é um ponto estacionário.

### OBSERVAÇÃO

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que  $x \in \mathcal{A}$  é estacionário se, e somente se,  $f(x) = 0$ .
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

## CONJUNTOS $\omega$ -LIMITE E $\alpha$ -LIMITE

### DEFINIÇÃO

Seja  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$  um campo vetorial de classe  $C^1$  no aberto  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d$ . Dado um ponto  $x \in \mathcal{A}$  definimos os conjuntos

$$\omega(x) = \{p \in \mathcal{A}; \text{ existe } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ tal que } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \phi(t_n, x) \rightarrow p\}$$

e

$$\alpha(x) = \{p \in \mathcal{A}; \text{ existe } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ tal que } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi(t_n, x) \rightarrow p\}$$

chamados de **conjunto  $\omega$ -limite** e **conjunto  $\alpha$ -limite**, respectivamente.

- Iremos sempre assumir que os intervalos maximais das soluções são iguais a  $\mathbb{R}$ .

## EXEMPLO 2

Para o campo linear  $f(x, y) = (x, -y)$  temos:

- $\omega(0) = \alpha(0) = \{0\}$ ;
- se  $x \in E_1 \setminus \{0\}$ , então  $\omega(x) = \emptyset$  e  $\alpha(x) = \{0\}$ ;
- se  $x \in E_2 \setminus \{0\}$ , então  $\omega(x) = \{0\}$  e  $\alpha(x) = \emptyset$ ;
- se  $x \in (E_1 \cup E_2)^c$ , então  $\omega(x) = \alpha(x) = \emptyset$ .

**EXEMPLO 2**

Para o campo linear  $f(x, y) = (x, -y)$  temos:

- $\omega(0) = \alpha(0) = \{0\}$ ;
- se  $x \in E_1 \setminus \{0\}$ , então  $\omega(x) = \emptyset$  e  $\alpha(x) = \{0\}$ ;
- se  $x \in E_2 \setminus \{0\}$ , então  $\omega(x) = \{0\}$  e  $\alpha(x) = \emptyset$ ;
- se  $x \in (E_1 \cup E_2)^c$ , então  $\omega(x) = \alpha(x) = \emptyset$ .

**EXEMPLO 2**

Se  $\gamma$  é um órbita periódica, então para qualquer  $x \in \gamma$ , temos  $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$ .

**EXEMPLO 2**

Para o campo linear  $f(x, y) = (x, -y)$  temos:

- $\omega(0) = \alpha(0) = \{0\}$ ;
- se  $x \in E_1 \setminus \{0\}$ , então  $\omega(x) = \emptyset$  e  $\alpha(x) = \{0\}$ ;
- se  $x \in E_2 \setminus \{0\}$ , então  $\omega(x) = \{0\}$  e  $\alpha(x) = \emptyset$ ;
- se  $x \in (E_1 \cup E_2)^c$ , então  $\omega(x) = \alpha(x) = \emptyset$ .

**EXEMPLO 2**

Se  $\gamma$  é um órbita periódica, então para qualquer  $x \in \gamma$ , temos  $\omega(x) = \alpha(x) = \gamma$ .

**EXEMPLO 3**

Considere o campo  $f(x, y) = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2))$  e seja  $\gamma$  a sua órbita periódica. Temos então:

- se  $x$  é um ponto no *interior* de  $\gamma$ , então  $\alpha(x) = \{0\}$ ;
- se  $x$  é um ponto no *exterior* de  $\gamma$ , então  $\alpha(x) = \emptyset$ ;
- se  $x$  é um ponto em  $\gamma$ , então  $\alpha(x) = \gamma$ ;
- se  $x \neq 0$ , então  $\omega(x) = \gamma$ .



## EXEMPLO 4

Para o campo

$$f(x, y) = (\sin(x)(-0.1 \cos(x) - \cos(y)), \sin(y)(\cos(x) - 0.1 \cos(y)))$$

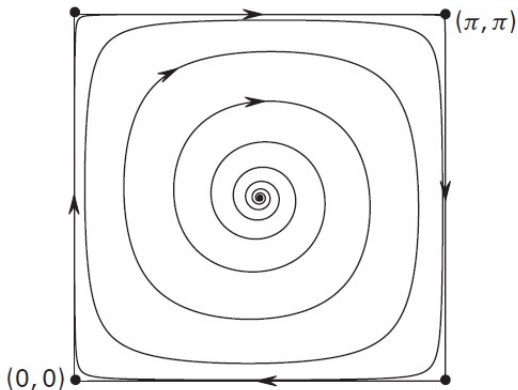
temos o seguinte:

**EXEMPLO 4**

Para o campo

$$f(x, y) = (\sin(x)(-0.1 \cos(x) - \cos(y)), \sin(y)(\cos(x) - 0.1 \cos(y)))$$

temos o seguinte:



## PROPRIEDADES

- Note que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  para o campo  $f$  é o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  para o campo  $-f$ .

## PROPRIEDADES

- Note que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  para o campo  $f$  é o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  para o campo  $-f$ .

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto  $C \subseteq \mathcal{A}$  é **invariante** pelo fluxo  $\phi$  se

$$p \in C \implies \phi(t, p) \in C, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo  $t \geq 0$  e **negativamente invariante** se for para todo  $t \leq 0$ .

## PROPRIEDADES

- Note que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  para o campo  $f$  é o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  para o campo  $-f$ .

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto  $C \subseteq \mathcal{A}$  é **invariante** pelo fluxo  $\phi$  se

$$p \in C \implies \phi(t, p) \in C, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo  $t \geq 0$  e **negativamente invariante** se for para todo  $t \leq 0$ .

### PROPOSIÇÃO

- (a) Se  $y$  pertence a órbita de  $x$ , então  $\omega(x) = \omega(y)$ .

## PROPRIEDADES

- Note que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  para o campo  $f$  é o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  para o campo  $-f$ .

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto  $C \subseteq \mathcal{A}$  é **invariante** pelo fluxo  $\phi$  se

$$p \in C \implies \phi(t, p) \in C, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo  $t \geq 0$  e **negativamente invariante** se for para todo  $t \leq 0$ .

### PROPOSIÇÃO

- Se  $y$  pertence a órbita de  $x$ , então  $\omega(x) = \omega(y)$ .
- O conjunto  $\omega(x)$  é fechado e invariante.

## PROPRIEDADES

- Note que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  para o campo  $f$  é o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  para o campo  $-f$ .

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto  $C \subseteq \mathcal{A}$  é **invariante** pelo fluxo  $\phi$  se

$$p \in C \implies \phi(t, p) \in C, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo  $t \geq 0$  e **negativamente invariante** se for para todo  $t \leq 0$ .

### PROPOSIÇÃO

- Se  $y$  pertence a órbita de  $x$ , então  $\omega(x) = \omega(y)$ .
- O conjunto  $\omega(x)$  é fechado e invariante.
- Se  $F \subseteq \mathcal{A}$  é um conjunto fechado e positivamente invariante, então  $\omega(x) \in F$ , para todo  $x \in F$ .

## PROPRIEDADES

- Note que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  para o campo  $f$  é o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  para o campo  $-f$ .

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto  $C \subseteq \mathcal{A}$  é **invariante** pelo fluxo  $\phi$  se

$$p \in C \implies \phi(t, p) \in C, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo  $t \geq 0$  e **negativamente invariante** se for para todo  $t \leq 0$ .

### PROPOSIÇÃO

- Se  $y$  pertence a órbita de  $x$ , então  $\omega(x) = \omega(y)$ .
- O conjunto  $\omega(x)$  é fechado e invariante.
- Se  $F \subseteq \mathcal{A}$  é um conjunto fechado e positivamente invariante, então  $\omega(x) \in F$ , para todo  $x \in F$ .
- Se  $z \in \omega(x)$ , então  $\omega(z) \subseteq \omega(x)$ .



## PROPRIEDADES

- Note que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  para o campo  $f$  é o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  para o campo  $-f$ .

### DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto  $C \subseteq \mathcal{A}$  é **invariante** pelo fluxo  $\phi$  se

$$p \in C \implies \phi(t, p) \in C, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo  $t \geq 0$  e **negativamente invariante** se for para todo  $t \leq 0$ .

### PROPOSIÇÃO

- Se  $y$  pertence a órbita de  $x$ , então  $\omega(x) = \omega(y)$ .
- O conjunto  $\omega(x)$  é fechado e invariante.
- Se  $F \subseteq \mathcal{A}$  é um conjunto fechado e positivamente invariante, então  $\omega(x) \in F$ , para todo  $x \in F$ .
- Se  $z \in \omega(x)$ , então  $\omega(z) \subseteq \omega(x)$ .
- Se  $\omega(x)$  é compacto, então é conexo.

## O TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

### TEOREMA

Sejam  $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo planar de classe  $C^1$  cujas soluções de  $x' = f(x)$  estão definidas em  $\mathbb{R}$  e um conjunto  $\omega$ -limite. Se  $\omega$  é

- compacto,
- não vazio e
- não contém singularidades de  $f$ ,

então  $\omega$  é uma órbita periódica.