MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

6 DE JUNHO

Aula de hoje: Seções transversais e Aplicação de Poincaré

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t), \ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

Definição (1)

Sejam $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{A}$ um ponto regular, ($f(x_0) \neq 0$) e V um subespaço de dimensão $n-1$. Diremos que o hiperplano

$$H = x_0 + V$$

é transversal a f em x_0 se $f(x_0) \notin V$.

Definição (1)

Sejam $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{A}$ um ponto regular, ($f(x_0) \neq 0$) e V um subespaço de dimensão $n-1$. Diremos que o hiperplano

$$H = x_0 + V$$

é transversal a f em x_0 se $f(x_0) \notin V$.

- Grosso modo, colocamos em x_0 um hiperplano H e pedimos que $f(x_0) \notin H$.
- Por continuidade, existe uma vizinhança W de x_0 tal que se $x \in H \cap W$, então $f(x) \notin H$.

Definição (1)

Sejam $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{A}$ um ponto regular, $(f(x_0) \neq 0)$ e V um subespaço de dimensão $n-1$. Diremos que o hiperplano

$$H = x_0 + V$$

é transversal a f em x_0 se $f(x_0) \notin V$.

- Grosso modo, colocamos em x_0 um hiperplano H e pedimos que $f(x_0) \notin H$.
- Por continuidade, existe uma vizinhança W de x_0 tal que se $x \in H \cap W$, então $f(x) \notin H$.

Definição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Uma **seção transversal local** (ou simplesmente seção local) de f em $x_0 \in \mathcal{A}$ é um conjunto $S = W \cap H \subset \mathcal{A}$ tal que W é um vizinhança de x_0 e H é um hiperplano transversal em x_0 tal que:

$$x \in S \Longrightarrow f(x) \notin H.$$

PROPOSIÇÃO (1)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Temos:

(a) Existe uma seção transversal local conexa em cada ponto regular de f;

(b) Se S é uma seção de f em x_0, então $f(x) \neq 0$, para cada $x \in S$;

(c) Se S é uma seção conexa, então os vetores $f(x)$, com $x \in S$, apontam todos para o mesmo lado de S em $\mathbb{R}^n$.

Proposição (1)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Temos:

(a) Existe uma seção transversal local conexa em cada ponto regular de f;

(b) Se S é uma seção de f em x_0, então $f(x) \neq 0$, para cada $x \in S$;

(c) Se S é uma seção conexa, então os vetores $f(x)$, com $x \in S$, apontam todos para o mesmo lado de S em $\mathbb{R}^n$.

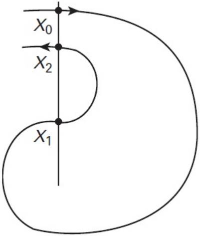


Figura: Não ocorre numa seção

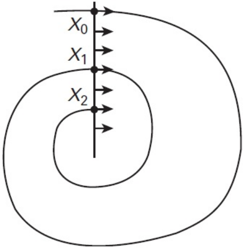


Figura: Como deve ser em uma seção

Para campos planares

Observação

- Para um campo planar $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ podemos pensar na seção transversal, num ponto regular, como sendo a intercessão de uma vizinhança com uma reta **perpendicular** ao vetor $f(x_0)$.
- Podemos parametrizar tal reta: tomamos um vetor unitário v_0 em x_0 e a função

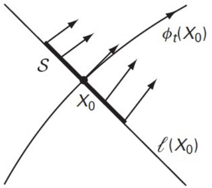
$$h(u) = x_0 + uv_0, \ u \in \mathbb{R}.$$

Para campos planares

Observação

- Para um campo planar $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ podemos pensar na seção transversal, num ponto regular, como sendo a intercessão de uma vizinhança com uma reta **perpendicular** ao vetor $f(x_0)$.
- Podemos parametrizar tal reta: tomamos um vetor unitário v_0 em x_0 e a função

$$h(u) = x_0 + uv_0, \; u \in \mathbb{R}.$$



Um resultado interessante

Teorema (1)

Sejam $\mathcal{S}$ uma seção local em x_0 do campo planar $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, e considere $\phi(t_0, z_0) = x_0$, para $z_0 \in \mathcal{A}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Então, existem:

- $U \subset W$, contendo z_0;
- um função $\tau : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1,

tais que $\tau(z_0) = t_0$ e

$$\phi(\tau(x), x) \in \mathcal{S}, \ \forall x \in U.$$

Um resultado interessante

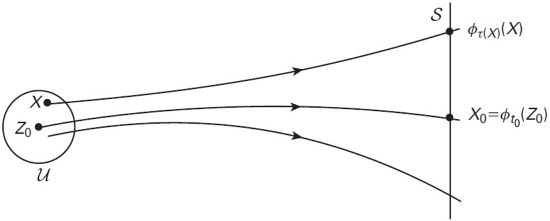
Teorema (1)

Sejam $\mathcal{S}$ uma seção local em x_0 do campo planar $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, e considere $\phi(t_0, z_0) = x_0$, para $z_0 \in \mathcal{A}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Então, existem:

- $U \subset W$, contendo z_0;
- um função $\tau : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1,

tais que $\tau(z_0) = t_0$ e

$$\phi(\tau(x), x) \in \mathcal{S}, \ \forall x \in U.$$



Aplicação de Poincaré

Considere γ uma órbita fechada de um campo planar. Sejam $x_0 \in \gamma$ um ponto e $\mathcal{S}$ um seção local em x_0. Consideramos então a função **primeiro retorno** a $\mathcal{S}$ da seguinte forma: dado $x \in \mathcal{S}$, próximo a x_0, defini-se então

$$P(x) = \phi(t, x) \in \mathcal{S}$$

sendo t o menor número positivo tal que $\phi(t, x) \in \mathcal{S}$.

Aplicação de Poincaré

Considere γ uma órbita fechada de um campo planar. Sejam $x_0 \in \gamma$ um ponto e $\mathcal{S}$ um seção local em x_0. Consideramos então a função **primeiro retorno** a $\mathcal{S}$ da seguinte forma: dado $x \in \mathcal{S}$, próximo a x_0, defini-se então

$$P(x) = \phi(t, x) \in \mathcal{S}$$

sendo t o menor número positivo tal que $\phi(t, x) \in \mathcal{S}$.

Teorema (2)

Sejam $x' = f(x)$ um sistema planar e x_0 pertencente a uma órbita fechada γ. Considere P a aplicação de Poincaré numa vizinhança de x_0 em alguma seção local. Se $|P'(x_0)| < 1$, então γ é uma órbita assintoticamente estável.

Teorema da curva de Jordan

- Uma curva **fechada simples** em $\mathbb{R}^d$ é a imagem homeomorfa de $\mathbb{S}^1$. Uma tal curva também é chamada de **curva de Jordan**.

Teorema da curva de Jordan

- Uma curva **fechada simples** em $\mathbb{R}^d$ é a imagem homeomorfa de $\mathbb{S}^1$. Uma tal curva também é chamada de **curva de Jordan**.

Teorema (da curva de Jordan)

O complementar no plano de uma curva de Jordan tem duas componentes conexas abertas disjuntas, uma limitada e outra ilimitada sendo a curva a fronteira comum das duas.

Sequências monótonas

Lema

Seja $x \in \mathcal{S}$ um ponto de uma seção local de f. Se a trajetória $x(t) = \phi(t, x)$ de f por x bater em $\mathcal{S}$ para tempos crescentes

$$0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$$

então a sequência de pontos $x_n = \phi(t_n, x)$ é **monótona** em $\mathcal{S}$, no seguinte sentido: no segmento $\mathcal{S}$, x_n está sempre entre x_{n-1} e x_{n+1}. Além disso, existem $t_n < t_{n+1}$ tais que $x_n = x_{n+1}$ se, e somente se, a trajetória é periódica.

Sequências monótonas

Lema

Seja $x \in \mathcal{S}$ um ponto de uma seção local de f. Se a trajetória $x(t) = \phi(t, x)$ de f por x bater em $\mathcal{S}$ para tempos crescentes

$$0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$$

então a sequência de pontos $x_n = \phi(t_n, x)$ é **monótona** em $\mathcal{S}$, no seguinte sentido: no segmento $\mathcal{S}$, x_n está sempre entre x_{n-1} e x_{n+1}. Além disso, existem $t_n < t_{n+1}$ tais que $x_n = x_{n+1}$ se, e somente se, a trajetória é periódica.