

MATE 7010

Equações Diferenciais Ordinárias

S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



Aula de hoje: Existência e unicidade das soluções (Parte I)

- O problema de Cauchy;
- Aproximações sucessivas;
- Espaços métricos completos (uma brevíssima introdução);
- Alguns espaços de funções;
- Teorema de Banach para o ponto fixo de contrações;

O GRANDE OBJETIVO

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Considere o problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em \mathbb{R}^n .

DEFINIÇÃO

Uma solução da equação (2) em U é uma função (ou caminho) $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 cujo gráfico está contido em U e satisfaz a igualdade

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I.$$

O GRANDE OBJETIVO

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Considere o problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em \mathbb{R}^n .

DEFINIÇÃO

Uma solução da equação (2) em U é uma função (ou caminho) $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 cujo gráfico está contido em U e satisfaz a igualdade

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I.$$

TEOREMA (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em U . Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução de (2) definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

SOBRE A NOTAÇÃO

- Como $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, então $\frac{\partial f}{\partial x}$ denota a função

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \rightarrow M(n),$$

dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right]_{n \times n} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t, x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(t, x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(t, x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, x) \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned}$$

- Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em U se, e somente se, cada $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ é contínua em U .

MOTIVAÇÃO

- Considere o problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

MOTIVAÇÃO

- Considere o problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

UMA FUNÇÃO AUXILIAR

Seja $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ a aplicação

$$Ty(t) = x_0 + \int_{t_0}^t y(s)ds,$$

sendo \mathcal{F} um espaço de funções adequado.

MOTIVAÇÃO

- Considere o problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

UMA FUNÇÃO AUXILIAR

Seja $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ a aplicação

$$Ty(t) = x_0 + \int_{t_0}^t y(s)ds,$$

sendo \mathcal{F} um espaço de funções adequado.

- Note que x é solução do problema acima se, e somente se, é um **ponto fixo** de T , ou seja,

$$T(x) = x.$$

- Uma forma de obter tal ponto fixo: considere $y_1 \equiv x_0$ e defina

$$y_{n+1} = T(y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

UMA IDEIA

- Considerando então o problema geral

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em \mathbb{R}^n .

UMA IDEIA

- Considerando então o problema geral

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em \mathbb{R}^n .

- Novamente, podemos definir o operador $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ pondo

$$T(y) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

sendo \mathcal{F} um espaço de funções adequado.

UMA IDEIA

- Considerando então o problema geral

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em \mathbb{R}^n .

- Novamente, podemos definir o operador $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ pondo

$$T(y) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

sendo \mathcal{F} um espaço de funções adequado.

- Assim, x é solução do problema se, e somente se, é um **ponto fixo** de T , ou seja,

$$T(x) = x.$$

UMA IDEIA

- Considerando então o problema geral

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

no qual $f = f(t, x)$ é uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores em \mathbb{R}^n .

- Novamente, podemos definir o operador $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ pondo

$$T(y) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

sendo \mathcal{F} um espaço de funções adequado.

- Assim, x é solução do problema se, e somente se, é um **ponto fixo** de T , ou seja,

$$T(x) = x.$$

- Podemos ainda tomar $y_1 \in \mathcal{F}$, com $y_1(t_0) = x_0$ e definir

$$y_{n+1} = T(y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

PERGUNTAS

- Qual é esse espaço de funções \mathcal{F} ?
- Que tipo de convergência esperamos para o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$?
- Como garantir que T possua **único** ponto fixo?

ESPAÇO MÉTRICOS

DEFINIÇÃO (MÉTRICA)

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

(D1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M.$

(D2) $d(x, y) = 0 \iff x = y.$

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M.$ (Simetria)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M.$ (Desigualdade Triangular)

ESPAÇO MÉTRICOS

DEFINIÇÃO (MÉTRICA)

Seja M um conjunto. Uma métrica (ou distância) em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

(D1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M.$

(D2) $d(x, y) = 0 \iff x = y.$

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M.$ (Simetria)

(D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M.$ (Desigualdade Triangular)

- Um conjunto M munido de uma métrica d é chamado de *Espaço Métrico* e será denotado por (M, d) .
- Se consideramos num conjunto M duas métricas, digamos d_1 e d_2 , então teremos dois espaços métricos $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$.
- Se (M, d) é um espaço métrico e $X \subset M$ é um subconjunto, então podemos considerar o espaço métrico (X, \tilde{d}) , sendo \tilde{d} a restrição de d ao conjunto $X \times X$. (Dizemos que \tilde{d} é a métrica induzida por d).

O EXEMPLO QUE NOS INTERESSA: ESPAÇOS NORMADOS

DEFINIÇÃO (NORMA)

Uma norma num \mathbb{K} -espaço vetorial V é uma função $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$.

O EXEMPLO QUE NOS INTERESSA: ESPAÇOS NORMADOS

DEFINIÇÃO (NORMA)

Uma norma num \mathbb{K} -espaço vetorial V é uma função $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V, \text{ valendo a igualdade se, e somente se, } x = 0.$$

$$(N2) \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K} \text{ e para todo } x \in V;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

- O par $(V, \| \cdot \|)$ é dito ser um *espaço normado*.
- Se $(V, \| \cdot \|)$ é um espaço normado e W é um subespaço vetorial de V , então temos o espaço normado $(W, \| \cdot \|_W)$, sendo $\| \cdot \|_W$ a restrição de $\| \cdot \|$ sobre W .

O EXEMPLO QUE NOS INTERESSA: ESPAÇOS NORMADOS

DEFINIÇÃO (NORMA)

Uma norma num \mathbb{K} -espaço vetorial V é uma função $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V, \text{ valendo a igualdade se, e somente se, } x = 0.$$

$$(N2) \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K} \text{ e para todo } x \in V;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

- O par $(V, \| \cdot \|)$ é dito ser um *espaço normado*.
- Se $(V, \| \cdot \|)$ é um espaço normado e W é um subespaço vetorial de V , então temos o espaço normado $(W, \| \cdot \|_W)$, sendo $\| \cdot \|_W$ a restrição de $\| \cdot \|$ sobre W .

PROPOSIÇÃO

Num espaço normado $(V, \| \cdot \|)$ tem-se a métrica (induzida por $\| \cdot \|$):

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{N}}.$$

O ESPAÇO EUCLIDIANO

- Considere \mathbb{R}^n com sua estrutura natural de espaço vetorial real e assuma fixada a base canônica. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escreva $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- Em \mathbb{R}^n temos as seguintes normas:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_s = \sum_{j=1}^n |x_j| \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

O ESPAÇO EUCLIDIANO

- Considere \mathbb{R}^n com sua estrutura natural de espaço vetorial real e assuma fixada a base canônica. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escreva $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- Em \mathbb{R}^n temos as seguintes normas:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_s = \sum_{j=1}^n |x_j| \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Normas equivalentes

É possível mostrar que em \mathbb{R}^n todas as normas são equivalentes, isto é, dadas duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, existem constantes a, b tais que

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ESPAÇOS DE FUNÇÕES

- Sejam X um conjunto arbitrário e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é limitada se existe $K \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq K, \forall x \in X.$$

- O conjunto das funções limitadas de X em \mathbb{R} será denotado por $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$.

ESPAÇOS DE FUNÇÕES

- Sejam X um conjunto arbitrário e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é limitada se existe $K \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq K, \forall x \in X.$$

- O conjunto das funções limitadas de X em \mathbb{R} será denotado por $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$.

Uma norma em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$

A função $\| \cdot \| : \mathcal{B}(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

define uma norma em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, chamada de *norma da convergência uniforme*.

Uma norma em $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto e $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então temos a norma

$$\|f\| = \sup_{x \in I} \|f(x)\| = \max_{x \in I} \|f(x)\|$$

SEQUÊNCIA CONVERGENTE

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ converge para $x \in M$ se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

- Utilizaremos a notação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ ou simplesmente, } x_n \rightarrow x.$$

- **Exercício:** Se $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, então $x = y$.

SEQUÊNCIA CONVERGENTE

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ converge para $x \in M$ se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

- Utilizaremos a notação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ ou simplesmente, } x_n \rightarrow x.$$

- **Exercício:** Se $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, então $x = y$.

SEQUÊNCIA DE CAUCHY

Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset M$ é de Cauchy se: dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO

DEFINIÇÃO

Um espaço métrico M é dito completo se toda sequência de Cauchy é convergente. Em particular:

- Um espaço normado completo é dito *Espaço de Banach*
- Um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*

ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO

DEFINIÇÃO

Um espaço métrico M é dito completo se toda sequência de Cauchy é convergente. Em particular:

- Um espaço normado completo é dito *Espaço de Banach*
- Um espaço com produto interno completo é dito *Espaço de Hilbert*

EXEMPLOS

- \mathbb{K}^n é completo.
- Todo espaço normado de dimensão finita é Banach.
- Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.
- O espaço $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ com a norma da convergência uniforme é completo.

PONTO DE FIXO DE BANACH PARA CONTRAÇÕES

TEOREMA

Seja (M, d) um espaço métrico completo. Se $f : M \rightarrow M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

então f tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in M$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

PONTO DE FIXO DE BANACH PARA CONTRAÇÕES

TEOREMA

Seja (M, d) um espaço métrico completo. Se $f : M \rightarrow M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

então f tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in M$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

COROLÁRIO

Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \rightarrow M$ uma função. Se existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que f^k é uma contração, então f possui um único ponto fixo $a \in M$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a, \quad \forall x \in M.$$

(Dem: Corolário 8.6 no livro do Lopes)

RETORNEMOS AO PROBLEMA PRINCIPAL

TEOREMA (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em U . Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4)$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

- Tática para a demonstração: iniciar com algumas hipóteses extras...

A HIPÓTESE LIPSCHITZ

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial em U se existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in U.$$

A HIPÓTESE LIPSCHITZ

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial em U se existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in U.$$

HIPÓTESE

Suponha que tenhamos um intervalo I tal que $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n \subset U$.

A HIPÓTESE LIPSCHITZ

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial em U se existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in U.$$

HIPÓTESE

Suponha que tenhamos um intervalo I tal que $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n \subset U$.

- Para cada $y \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$, defina

$$Ty(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds, \quad t \in I.$$

- Note que x é solução de (5) se, e somente se, $Tx = x$.

- Note que $Ty \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$, ou seja, $T : \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$.
- Mais ainda, se supormos que I é um intervalo compacto, então $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo (ou um espaço de Banach).

- Note que $Ty \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$, ou seja, $T : \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$.
- Mais ainda, se supormos que I é um intervalo compacto, então $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo (ou um espaço de Banach).

LEMA

Seja $K > 0$ uma constante de Lipschitz de f em $I \times \mathbb{R}^n$. Então, dado $m \in \mathbb{N}_0$,

$$|T^m g(t) - T^m h(t)| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m \|g - h\|,$$

para quaisquer $g, h \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ e todo $t \in T$.

UM PRIMEIRO RESULTADO

TEOREMA 1

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Assuma que $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subset U$ e que f é lipschitziana na variável espacial em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. Nestas condições, dados qualquer ponto $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (5)$$

definida no intervalo $[a, b]$.

APLICAÇÃO

TEOREMA 2

Sejam $A : I \rightarrow M(n)$ e $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois caminhos contínuos num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Então, dados quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo I .

APLICAÇÃO

TEOREMA 2

Sejam $A : I \rightarrow M(n)$ e $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois caminhos contínuos num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Então, dados quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo I .

COROLÁRIO

Se $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$ é uma matriz real, então dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

definida em \mathbb{R} .