# MATE 7010
# Equações Diferenciais Ordinárias
# S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

# 28 de Março

Aula de hoje: Existência e unicidade das soluções (Parte II)

- Teorema de Picard-Lindelöf
- Teorema de Cauchy-Peano
- T.E.U.
- T.E.U. para equações autônomas.

## O grande objetivo

### Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto $U$. Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

## SOBRE A NOTAÇÃO

- Como $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ denota a função

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \to M(n),$$

dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)\right]_{n\times n} \\
&= \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t,x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t,x) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t,x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(t,x) \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t,x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(t,x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t,x)
\end{bmatrix}_{n\times n}
\end{aligned}$$

- Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $U$ se, e somente se, cada $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ é contínua em $U$.

## Espaços de funções

### Uma norma em $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto e $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas $f : I \to \mathbb{R}^n$. Então temos a norma (da convergência uniforme)

$$\|f\| = \sup_{x\in I} \|f(x)\| = \max_{x\in I} \|f(x)\|.$$

### Proposição

O espaço $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é completo quando munido da norma da convergência uniforme.

## Ponto de fixo de Banach para contrações

### Teorema

Seja $(M, d)$ um espaço métrico completo. Se $T : M \to M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

então $T$ tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in M$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

### Corolário

Sejam $(M, d)$ um espaço métrico completo e $T : M \to M$ uma função. Se existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^k$ é uma contração, então $T$ possui um único ponto fixo $a \in M$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(\mu) = a, \ \forall \mu \in M.$$

(Dem: Corolário 8.6 no livro do Lopes) (Dem: Corolário da página 13 no livro do Soto)

# A hipótese Lipschitz

### Definição

Dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial em $U$ se existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K\|x - y\|, \ \forall (t,x), (t,y) \in U.$$

### Hipótese

Suponha que tenhamos um intervalo $I$ tal que $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n \subset U$.

- Para cada $y \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^n)$, defina

$$Ty(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \ t \in I. \tag{2}$$

- Note que $x$ é solução de (17) se, e somente se, $Tx = x$.

- Note que $Ty \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$, ou seja, $T : \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$.
- Mais ainda, se supormos que $I$ é um intervalo compacto, então $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo (ou um espaço de Banach).

## Lema

Seja $K > 0$ uma constante de Lipschitz de $f$ em $I \times \mathbb{R}^n$. Então, dado $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\|T^m g(t) - T^m h(t)\| \leq \frac{K^m}{m!}|t - t_0|^m \|g - h\|_\infty,$$

para quaisquer $g, h \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$ e todo $t \in T$.

## Um primeiro resultado

### Teorema 1

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Assuma que $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subset U$ e que $f$ é lipschitziana na variável espacial em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. Nestas condições, dados qualquer ponto $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

definida no intervalo $[a, b]$.

## Aplicação

### Teorema 2

Sejam $A : I \to M(n)$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ dois caminhos contínuos num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Então, dados quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo $I$.

### Corolário

Se $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ é uma matriz real, então dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

definida em $\mathbb{R}$.

## O caso geral para $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$

- Voltemos a supor $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua em que $U$ não necessariamente contém uma faixa vertical.

### Retângulo

Dados $(t_0, x_0) \in U$, podemos escolher $a, b > 0$ tais que

$$R_{a,b} = I_a \times B_b$$

esteja contido em $U$, sendo

$$I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \ \text{ e } \ B_b = B[x_0, b].$$

### Espaço de funções

Para $a$ e $b$ escolhidos acima, denotaremos por $\mathscr{F} = \mathscr{C}(I_a; B_b)$ o espaço da funções contínuas de $I_a$ em $B_b$. Note que $\mathscr{F}$ é completo quando munido da norma da convergência uniforme.

# Picard-Lindelöf

## Proposição

Sejam $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $M$ uma constante positiva satisfazendo

$$\|f(t,x)\| \leq M, \ \forall (t,x) \in R_{a,b}.$$

Definindo

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \tag{4}$$

tem-se $T : \mathscr{C}(I_\alpha; B_b) \to \mathscr{C}(I_\alpha; B_b)$.

## Teorema (Picard-Lindelöf)

Sejam $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} \subset U$. Se $f$ é lipschitziana em $R_{a,b}$, então existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, sendo $\alpha$ como em (4).

# Finalmente, o T.E.U.

### Proposição

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em $U$. Dados $(t_0, x_0) \in U$ e o retângulo $R_{a,b}$, existe uma constante $K > 0$ tal que:

(a)
$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq K, \ \forall (t, x) \in R_{a,b}.$$

(b)
$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \ \forall (t, x), (t, y) \in R_{a,b}.$$

### Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em $U$. Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I. (1) definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

## T.E.U. para equações autônomas

### Teorema

Suponha $f : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^1$ no aberto $W$. Então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times W$ existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

## Cauchy-Peano

### Teorema (Ascoli)

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de caminhos contínuos $x_n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e suponha que existam constantes $M, K > 0$ tais que, para todo $n$ e todos $s, t \in [a, b]$,

$$\|x_n(s) - x_n(t)\| \leq K|s - t| \ \text{ e } \ \|x_n(t)\| \leq M.$$

Existe uma subsequência de $\{x_n\}$ que é de Cauchy em $\mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ e portanto converge uniformemente para $x \in \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R}^n)$.

## Cauchy-Peano

- Sejam $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} \subset U$.
- Considere também $\alpha$ como em (4).
- Fixado $\delta > 0$, denote
$$I(\delta) = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

### Lema

Dado qualquer $0 < \epsilon \leq \delta$ existe um caminho contínuo $x_\epsilon : I(\delta) \to \mathbb{R}^n$ tal que, para quaisquer $t, u \in I(\delta)$, valem
$$\|x_\epsilon(t) - x_\epsilon(u)\| \leq M|t-u| \ \text{ e } \ \|x_\epsilon(t) - x_0\| \leq b \tag{5}$$
e, para qualquer $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, vale
$$x_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_\epsilon(s-\epsilon))ds \tag{6}$$

# Cauchy-Peano

### Teorema (Cauchy-Peano)

Sejam $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} \subset U$. Então existe uma solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, sendo $\alpha$ como em (4).