MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

6 de Abril

Aula de hoje: Continuidade do fluxo

- Fluxo de equações diferenciais
- Continuidade do fluxo

Existência e unicidade

Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U.

- Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

  definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.
- Além disso, Para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução máxima de (1), necessariamente definida num intervalo aberto.

Fluxo

- Dados $(u,x) \in U$, denote por $I = I(u,x)$ o intervalo (aberto) de definição da solução máxima do problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(u) = x, \end{cases} \tag{2}$$

e por $\varphi(t,u,x)$ sua solução máxima.

Fluxo

- Dados $(u,x) \in U$, denote por $I = I(u,x)$ o intervalo (aberto) de definição da solução máxima do problema

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(u) = x, \end{cases} \tag{2}$$

e por $\varphi(t,u,x)$ sua solução máxima.

Definição (Fluxo)

O **fluxo** da equação $x' = f(t,x)$ é por definição a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t,u,x) = x + \int_u^t f(s, \varphi(s,u,x))ds, \tag{3}$$

sendo

$$\Omega = \Big\{(t,u,x) \in \mathbb{R}^{n+2};\ t \in I(u,x),\ (u,x) \in U\Big\} \subset \mathbb{R} \times U.$$

- Note que o fluxo equivale a

$$\varphi(u,u,x) = x \ \text{ e } \ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,u,x) = f(t, \varphi(t,u,x)), \tag{4}$$

para $(t,u,x) \in \Omega$.

Fluxo de equações autônomas

- Considere o caso particular em que $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Denote por $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x), x(0) = x$.

Fluxo de equações autônomas

- Considere o caso particular em que $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Denote por $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x), x(0) = x$.
- Neste caso,
$$\phi(t,x) = x + \int_0^t f(\phi(s,x))ds,$$
sendo $\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \in I(x),\ x \in E\right\} \subset \mathbb{R} \times E$.

Fluxo de equações autônomas

- Considere o caso particular em que $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Denote por $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x),\, x(0) = x$.
- Neste caso,
$$\phi(t,x) = x + \int_0^t f(\phi(s,x))ds,$$
sendo $\Omega = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \in I(x),\ x \in E\big\} \subset \mathbb{R} \times E$.
- O fluxo equivale a
$$\phi(0,x) = x \ \text{ e } \ \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = f(\phi(t,x)) = f \circ \phi(t,x)$$
para $(t,x) \in \Omega$.

Fluxo de equações autônomas

- Considere o caso particular em que $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Denote por $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x)$, $x(0) = x$.
- Neste caso,

$$\phi(t,x) = x + \int_0^t f(\phi(s,x))ds,$$

sendo $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \in I(x),\ x \in E\} \subset \mathbb{R} \times E$.

- O fluxo equivale a

$$\phi(0,x) = x \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = f(\phi(t,x)) = f \circ \phi(t,x)$$

para $(t,x) \in \Omega$.

Exemplo

O fluxo da equação $x' = Ax$ é

$$\phi(t,x) = \exp(tA)x,\ \Omega = \mathbb{R}^{n+1},$$

Objetivo

Teorema (Continuidade do fluxo)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U. Então, o fluxo $\varphi(t, x, u)$ de $x' = f(t, x)$ é contínuo no aberto Ω.

Objetivo

Teorema (Continuidade do fluxo)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U. Então, o fluxo $\varphi(t, x, u)$ de $x' = f(t, x)$ é contínuo no aberto Ω.

Proposição

(a) Se $A : I \to M(n)$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ são caminhos contínuos no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então o fluxo $\varphi(t, x, u)$ de $x' = A(t)x + b(t)$ é contínuo em $\Omega = I \times I \times M(n)$.

Objetivo

Teorema (Continuidade do fluxo)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U. Então, o fluxo $\varphi(t, x, u)$ de $x' = f(t, x)$ é contínuo no aberto Ω.

Proposição

(a) Se $A : I \to M(n)$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ são caminhos contínuos no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então o fluxo $\varphi(t, x, u)$ de $x' = A(t)x + b(t)$ é contínuo em $\Omega = I \times I \times M(n)$.

(b) Se $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $E \subset \mathbb{R}^n$, então o fluxo $\phi(t, x)$ de $x' = f(x)$ é contínuo no aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$.

Objetivo

Teorema (Continuidade do fluxo)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U. Então, o fluxo $\varphi(t, x, u)$ de $x' = f(t, x)$ é contínuo no aberto Ω.

Proposição

(a) Se $A : I \to M(n)$ e $b : I \to \mathbb{R}^n$ são caminhos contínuos no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então o fluxo $\varphi(t, x, u)$ de $x' = A(t)x + b(t)$ é contínuo em $\Omega = I \times I \times M(n)$.

(b) Se $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 sobre o aberto $E \subset \mathbb{R}^n$, então o fluxo $\phi(t, x)$ de $x' = f(x)$ é contínuo no aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$.

(c) O fluxo $\phi(t, x) = \exp(tA)x$ da equação $x' = Ax$ é contínuo em $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$.

Definição

Dizemos que

$$x' = f(t, x, \lambda) \doteq f_\lambda(t, x)$$

é uma **família a um parâmetro** $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k$ de equações diferenciais se $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ abertos. Uma caminho diferenciável $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$é dito **solução** dessa equação diferencial se:

(i) $(t, x(t)) \in U$, para todo $t \in I$;

(ii) existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t), \lambda_0) \doteq f_{\lambda_0}(t, x(t)), \ t \in I.$$

DEFINIÇÃO

Dizemos que

$$x' = f(t, x, \lambda) \doteq f_\lambda(t, x)$$

é uma **família a um parâmetro** $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k$ de equações diferenciais se $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ abertos. Uma caminho diferenciável $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$é dito **solução** dessa equação diferencial se:

(i) $(t, x(t)) \in U$, para todo $t \in I$;

(ii) existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t), \lambda_0) \doteq f_{\lambda_0}(t, x(t)),\ t \in I.$$

- Um P.V.I. dessa equação corresponde a fixar $(t_0, x_0) \in U$ e exigir $x(t_0) = x_0$.

Definição

Dizemos que

$$x' = f(t, x, \lambda) \doteq f_\lambda(t, x)$$

é uma **família a um parâmetro** $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k$ de equações diferenciais se $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ abertos. Uma caminho diferenciável $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$é dito **solução** dessa equação diferencial se:

(i) $(t, x(t)) \in U$, para todo $t \in I$;

(ii) existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t), \lambda_0) \doteq f_{\lambda_0}(t, x(t)),\ t \in I.$$

- Um P.V.I. dessa equação corresponde a fixar $(t_0, x_0) \in U$ e exigir $x(t_0) = x_0$.
- É possível reduzir uma família $x' = f(t, x, \lambda)$ a uma equação

  $$y' = g(t, y),$$

  através da aplicação $g : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ dada por

  $$g(t, y) = g(t, (x, \lambda)) = (f(t, x, \lambda), 0), \quad \text{com} \quad n = m + k.$$

Definição

Dizemos que
$$x' = f(t,x,\lambda) \doteq f_\lambda(t,x)$$
é uma **família a um parâmetro** $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k$ de equações diferenciais se $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ abertos. Uma caminho diferenciável $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$é dito **solução** dessa equação diferencial se:

(i) $(t, x(t)) \in U$, para todo $t \in I$;

(ii) existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que
$$x'(t) = f(t,x(t),\lambda_0) \doteq f_{\lambda_0}(t,x(t)),\ t \in I.$$

- Um P.V.I. dessa equação corresponde a fixar $(t_0,x_0) \in U$ e exigir $x(t_0) = x_0$.
- É possível reduzir uma família $x' = f(t,x,\lambda)$ a uma equação
$$y' = g(t,y),$$
através da aplicação $g : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ dada por
$$g(t,y) = g(t,(x,\lambda)) = (f(t,x,\lambda),0), \quad \text{com} \quad n = m+k.$$
- Assim, existência e unicidade de equações com parâmetros equivale a existência e unicidade de equações sem parâmetros.

Fluxo

- Suponha $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ um conjunto de parâmetros aberto. Se $\partial f / \partial x$ contínua em $U \times \Lambda$, então fixado $\lambda \in \Lambda$ temos que $g(t,x) = f(t,x,\lambda)$ é contínua em U com derivada espacial $\partial g / \partial x = \partial f / \partial x$ contínua em U.

Fluxo

- Suponha $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ um conjunto de parâmetros aberto. Se $\partial f/\partial x$ contínua em $U \times \Lambda$, então fixado $\lambda \in \Lambda$ temos que $g(t,x) = f(t,x,\lambda)$ é contínua em U com derivada espacial $\partial g/\partial x = \partial f/\partial x$ contínua em U.
- Portanto, o P.V.I $x' = g(t,x)$, $x(u) = x$, tem única solução maximal $\varphi(t,u,x,\lambda)$ definida em $I(u,x,\lambda) \doteq I(u,x)$.

Fluxo

- Suponha $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ um conjunto de parâmetros aberto. Se $\partial f / \partial x$ contínua em $U \times \Lambda$, então fixado $\lambda \in \Lambda$ temos que $g(t,x) = f(t,x,\lambda)$ é contínua em U com derivada espacial $\partial g/\partial x = \partial f / \partial x$ contínua em U.
- Portanto, o P.V.I $x' = g(t,x)$, $x(u) = x$, tem única solução maximal $\varphi(t,u,x,\lambda)$ definida em $I(u,x,\lambda) \doteq I(u,x)$.

Definição (Fluxo)

O **fluxo** da equação com parâmetro é a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t,u,x,\lambda) = x + \int_u^t f(s, \varphi(s,u,x,\lambda), \lambda) ds, \tag{5}$$

sendo

$$\Omega = \{(t,u,x,\lambda);\ t \in I(u,x,\lambda),\ (u,x,\lambda) \in U \times \Lambda\} \subseteq \mathbb{R} \times U \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^{n+k+2},$$

o que equivale a

$$\varphi(u,u,x,\lambda) = x \ \text{ e } \ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,u,x,\lambda) = f(t, \varphi(t,u,x,\lambda), \lambda),\ (t,u,x,\lambda) \in \Omega. \tag{6}$$

Continuidade do fluxo (com parâmetros)

Teorema

Sejam

$$f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial x} : U \times \Lambda \to M(n)$$

funções contínuas no aberto $U \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$. Nestas condições, o fluxo $\varphi(t, u, x, \lambda)$ de $x' = f(t, x, \lambda)$ é contínuo no aberto

$$\Omega = \{(t, u, x, \lambda);\ t \in I(u, x, \lambda),\ (u, x, \lambda) \in U \times \Lambda\} \subseteq \mathbb{R}^{n+k+2}.$$

Iremos precisar dos seguintes lemas (exercícios)

Lema (1)

Sejam $N \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um compacto, $E \subset \mathbb{R}^m$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Defina por $\mathscr{C}(I \times E, \mathbb{R}^m; N)$ o conjunto das aplicações $f : I \times E \to \mathbb{R}^m$ contínuas tais que

$$\{(s, f(s,y));\ s \in I, y \in E\} \subset N.$$

Nestas condições, $\mathscr{C}(I \times E, \mathbb{R}^m; N)$ é um subespaço fechado de $\mathscr{B}_0(I \times E; \mathbb{R}^m)$ e, portanto, completo.

Lema (2)

Sejam $\{x_n\} \subset M$ uma sequência num espaço métrico (M, d) e $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais não negativos. Suponha que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum a_n$ converge, então $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

Demonstração do teorema

- Fixemos $(t_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega$. Considere $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a solução de $x' = f(t, x, \lambda_0)$, $x(t_0) = x_0$, com $a < t_0 < b$ e $[a, b] \subseteq I(t_0, x_0, \lambda_0)$.

Demonstração do teorema

- Fixemos $(t_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega$. Considere $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a solução de $x' = f(t, x, \lambda_0)$, $x(t_0) = x_0$, com $a < t_0 < b$ e $[a, b] \subseteq I(t_0, x_0, \lambda_0)$.
- Note então que

$$x(t) = x(u) + \int_u^t f(s, x(s), \lambda_0)ds, \; a \leq t, \; u \leq b. \tag{7}$$

Demonstração do teorema

- Fixemos $(t_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega$. Considere $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a solução de $x' = f(t, x, \lambda_0)$, $x(t_0) = x_0$, com $a < t_0 < b$ e $[a, b] \subseteq I(t_0, x_0, \lambda_0)$.
- Note então que

$$x(t) = x(u) + \int_u^t f(s, x(s), \lambda_0) ds, \; a \leq t, \; u \leq b. \tag{7}$$

- Uma vez que o conjunto $\{(t, x(t), \lambda_0) \;\; t \in [a, b]\} \subset U \times \Lambda$ é compacto, então podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que

$$N_1 = \{(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+k+1}; \; t \in [a, b], \; \|x(t) - x\| + \|\lambda - \lambda_0\| \leq \delta_1\} \subset U \times \Lambda.$$

- Como $\partial f/\partial x$ é contínua em $U \times \Lambda$, então existe uma constante Lipschitz $K > 0$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\lambda)\| \leq K\|x - y\|, \ \forall (s,x,\lambda), (s,y,\lambda) \in N_1. \tag{8}$$

- Como $\partial f/\partial x$ é contínua em $U \times \Lambda$, então existe uma constante Lipschitz $K > 0$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\lambda)\| \leq K\|x-y\|, \ \forall (s,x,\lambda),(s,y,\lambda) \in N_1. \tag{8}$$

- Temos também que f é uniformemente contínua em N_1, donde podemos escolher $0 < \delta < \frac{1}{2}\delta_1$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\mu)\| < \epsilon = K \exp\left(-K(b-a)\right)\frac{1}{2}\delta_1, \tag{9}$$

para todo $(s,x,\lambda),(s,y,\mu) \in N_1$ tais que $\|x-y\| + \|\lambda - \mu\| < \delta$.

- Como $\partial f/\partial x$ é contínua em $U \times \Lambda$, então existe uma constante Lipschitz $K > 0$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\lambda)\| \leq K\|x-y\|, \ \forall (s,x,\lambda), (s,y,\lambda) \in N_1. \tag{8}$$

- Temos também que f é uniformemente contínua em N_1, donde podemos escolher $0 < \delta < \frac{1}{2}\delta_1$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\mu)\| < \epsilon = K \exp\left(-K(b-a)\right) \frac{1}{2}\delta_1, \tag{9}$$

  para todo $(s,x,\lambda), (s,y,\mu) \in N_1$ tais que $\|x-y\| + \|\lambda - \mu\| < \delta$.

- Defina então

$$U_0 = \{(t,x,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+k+1};\ t \in (a,b),\ \|x(t) - x\| + \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\} \subset N_1.$$

- Como $\partial f/\partial x$ é contínua em $U \times \Lambda$, então existe uma constante Lipschitz $K > 0$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\lambda)\| \leq K\|x-y\|,\ \forall (s,x,\lambda),(s,y,\lambda) \in N_1. \tag{8}$$

- Temos também que f é uniformemente contínua em N_1, donde podemos escolher $0 < \delta < \frac{1}{2}\delta_1$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\mu)\| < \epsilon = K\exp\left(-K(b-a)\right)\frac{1}{2}\delta_1, \tag{9}$$

para todo $(s,x,\lambda),(s,y,\mu) \in N_1$ tais que $\|x-y\| + \|\lambda-\mu\| < \delta$.

- Defina então

$$U_0 = \{(t,x,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+k+1};\ t \in (a,b),\ \|x(t)-x\| + \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\} \subset N_1.$$

- Note que $(t_0,x_0,\lambda_0) \in U_0$ e que $U_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+k+1}$ é aberto.

- Como $\partial f/\partial x$ é contínua em $U \times \Lambda$, então existe uma constante Lipschitz $K > 0$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\lambda)\| \leq K\|x-y\|, \ \forall (s,x,\lambda), (s,y,\lambda) \in N_1. \tag{8}$$

- Temos também que f é uniformemente contínua em N_1, donde podemos escolher $0 < \delta < \frac{1}{2}\delta_1$ tal que

$$\|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\mu)\| < \epsilon = K\exp\left(-K(b-a)\right)\frac{1}{2}\delta_1, \tag{9}$$

para todo $(s,x,\lambda), (s,y,\mu) \in N_1$ tais que $\|x-y\| + \|\lambda - \mu\| < \delta$.

- Defina então

$$U_0 = \{(t,x,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+k+1};\ t \in (a,b),\ \|x(t) - x\| + \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\} \subset N_1.$$

- Note que $(t_0, x_0, \lambda_0) \in U_0$ e que $U_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+k+1}$ é aberto.
- Mostraremos que $(a,b) \times U_0 \subseteq \Omega$ e que o fluxo φ de f é contínuo em $(a,b) \times U_0$.

- Denote por
$$\mathscr{C}_\delta = \mathscr{C}_\delta((a,b) \times U_0, \mathbb{R}^n; N_1)$$
o conjunto das aplicações $\psi : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ contínuas tais que
$$(t, \psi(t,u,x,\lambda), \lambda) \in N_1$$
para todo $(t,u,x,\lambda) \in (a,b) \times U_0$.

- Denote por
$$\mathscr{C}_\delta = \mathscr{C}_\delta((a,b) \times U_0, \mathbb{R}^n; N_1)$$
o conjunto das aplicações $\psi : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ contínuas tais que
$$(t, \psi(t,u,x,\lambda), \lambda) \in N_1$$
para todo $(t,u,x,\lambda) \in (a,b) \times U_0$.
- Note que, pelo Lema (1), $\mathscr{C}_\delta$ é completo.

- Denote por
$$\mathscr{C}_\delta = \mathscr{C}_\delta((a,b) \times U_0, \mathbb{R}^n; N_1)$$
o conjunto das aplicações $\psi : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ contínuas tais que
$$(t, \psi(t,u,x,\lambda), \lambda) \in N_1$$
para todo $(t,u,x,\lambda) \in (a,b) \times U_0$.
- Note que, pelo Lema (1), $\mathscr{C}_\delta$ é completo.
- Iremos construir aproximações sucessivas em $\mathscr{C}_\delta$ do fluxo de f.
- Para isso, seja $\psi_0 : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ definida por
$$\psi_0(t,u,x,\lambda) = x + \int_u^t f(s, x(s), \lambda_0) ds. \tag{10}$$

- Denote por
$$\mathscr{C}_\delta = \mathscr{C}_\delta((a,b) \times U_0, \mathbb{R}^n; N_1)$$
o conjunto das aplicações $\psi : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ contínuas tais que
$$(t, \psi(t,u,x,\lambda), \lambda) \in N_1$$
para todo $(t,u,x,\lambda) \in (a,b) \times U_0$.
- Note que, pelo Lema (1), $\mathscr{C}_\delta$ é completo.
- Iremos construir aproximações sucessivas em $\mathscr{C}_\delta$ do fluxo de f.
- Para isso, seja $\psi_0 : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ definida por
$$\psi_0(t,u,x,\lambda) = x + \int_u^t f(s, x(s), \lambda_0)ds. \tag{10}$$
- Indutivamente, considere $\psi_j : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ definida por
$$\psi_j(t,u,x,\lambda) = x + \int_u^t f(s, \psi_{j-1}(s,u,x,\lambda), \lambda)ds. \tag{11}$$

Próximos passos

- Mostraremos que $\{\psi_j\} \subset \mathscr{C}_\delta$;
- Mostraremos que $\{\psi_j\} \subset \mathscr{C}_\delta$ é uma sequência de Cauchy.

- Segue de (9) e que (11)

$$\|f(s, \psi_0(s, u, x, \lambda), \lambda) - f(s, x(s), \lambda_0)\| < \epsilon$$

para todo $(s, u, x, \lambda) \in (a, b) \times U_0$.

- Segue de (9) e que (11)

$$\|f(s,\psi_0(s,u,x,\lambda),\lambda)-f(s,x(s),\lambda_0)\|<\epsilon$$

para todo $(s,u,x,\lambda)\in(a,b)\times U_0$.

- Em particular, se $(t,u,x,\lambda)\in(a,b)\times U_0$ então

$$\|\psi_1(t,u,x,\lambda)-\psi_0(t,u,x,\lambda)\|\leq\epsilon|t-u|$$

e

$$(t,\psi_1(t,u,x,\lambda),\lambda)\in N_1,$$

donde $\psi_1\in\mathscr{C}_\delta$.

- Segue de (9) e que (11)

$$\|f(s, \psi_0(s,u,x,\lambda),\lambda) - f(s, x(s), \lambda_0)\| < \epsilon$$

para todo $(s,u,x,\lambda) \in (a,b) \times U_0$.

- Em particular, se $(t,u,x,\lambda) \in (a,b) \times U_0$ então

$$\|\psi_1(t,u,x,\lambda) - \psi_0(t,u,x,\lambda)\| \leq \epsilon|t-u|$$

e

$$(t, \psi_1(t,u,x,\lambda), \lambda) \in N_1,$$

donde $\psi_1 \in \mathscr{C}_\delta$.

- Por indução, é possível verificar que $\{\psi_j\} \subset \mathscr{C}_\delta$ e que

$$\|\psi_{j+1}(t,u,x,\lambda) - \psi_j(t,u,x,\lambda)\| \leq \epsilon K^j \frac{1}{(j+1)!}|t-u|^{j+1},$$

para todo $(t,u,x,\lambda) \in (a,b) \times U_0$.

Lema de Gronwall

Se $v : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$v(t) \leq a + \left| \int_u^t bv(s)ds \right|,$$

para todo $t \in I$ e $a, b \geq 0$ e $u \in I$ constantes, então

$$v(t) \leq a \exp(b|t-u|), \ \forall t \in I.$$

Proposição

Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas no aberto $u \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $x, y : I \to \mathbb{R}^n$ soluções das equações

$$x' = f(t,x) \text{ e } y' = g(t,y).$$

Suponha que existam $\epsilon \geq 0$ e $K > 0$ tais que

$$\|f(t,x) - g(t,x)\| \leq \epsilon \text{ e } \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K\|x - y\|,$$

para todo $(t,x), (t,y) \in U$. Nestas condições,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(u) - y(u)\| \exp(K|t-u|) + \frac{\epsilon}{K}[\exp(K|t-u|) - 1],$$

para todo $t, u \in I$.

Proposição

Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas no aberto $u \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $x, y : I \to \mathbb{R}^n$ soluções das equações

$$x' = f(t,x) \text{ e } y' = g(t,y).$$

Suponha que existam $\epsilon \geq 0$ e $K > 0$ tais que

$$\|f(t,x) - g(t,x)\| \leq \epsilon \text{ e } \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K\|x - y\|,$$

para todo $(t,x), (t,y) \in U$. Nestas condições,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(u) - y(u)\| \exp(K|t-u|) + \frac{\epsilon}{K}[\exp(K|t-u|) - 1],$$

para todo $t, u \in I$.

Corolário

Se K é uma constante de Lipschitz de f em U, então para $t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, y_0)$ vale

$$\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\| \exp(K|t - t_0|).$$