MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

20 de Abril

Aula de hoje: Sistemas lineares

- Equações lineares;
- Matriz fundamental;
- Exponencial de matrizes;

T.E.U

Teorema (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U.

- Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

  definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.
- Além disso, para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma única solução máxima, necessariamente definida num intervalo aberto.

- Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo,

$$A : I \to M(n) \text{ e } b : I \to \mathbb{R}^n$$

duas aplicações contínuas.

TEOREMA

Para cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, $t \in I$, do problema

$$\begin{cases} x' = A(t) \cdot x + b, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

Em particular, para $b \equiv 0$, a equação

$$x' = A(t) \cdot x \tag{2}$$

é dita homogênea.

- Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo,

$$A : I \to M(n) \;\text{ e }\; b : I \to \mathbb{R}^n$$

duas aplicações contínuas.

Teorema

Para cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, $t \in I$, do problema

$$\begin{cases} x' = A(t) \cdot x + b, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

Em particular, para $b \equiv 0$, a equação

$$x' = A(t) \cdot x \tag{2}$$

é dita homogênea.

- Note que se φ é solução de (2) e $\varphi(s) = 0$ para algum $s \in I$, então $\varphi \equiv 0$.

Proposição

O conjunto $\mathscr{A}$ de todas as soluções da equação homogênea (2) é um espaço vetorial (subespaço de $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$). Além disso:

Proposição

O conjunto $\mathscr{A}$ de todas as soluções da equação homogênea (2) é um espaço vetorial (subespaço de $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$). Além disso:

(a) Dado $s \in I$, a aplicação $\Lambda_s : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^n$ que a cada $\varphi \in \mathscr{A}$ associa o vetor $\varphi(s)$ é um isomorfismo;

(b) $dim(\mathscr{A}) = n$;

(c) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é uma base de $\mathscr{A}$, sendo

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(t, s, v_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Proposição

O conjunto $\mathscr{A}$ de todas as soluções da equação homogênea (2) é um espaço vetorial (subespaço de $\mathscr{C}(I;\mathbb{R}^n)$). Além disso:

(a) Dado $s \in I$, a aplicação $\Lambda_s : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^n$ que a cada $\varphi \in \mathscr{A}$ associa o vetor $\varphi(s)$ é um isomorfismo;

(b) $dim(\mathscr{A}) = n$;

(c) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é uma base de $\mathscr{A}$, sendo

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(t, s, v_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Corolário

Considere a aplicação $\phi_s^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi_s^t(x) = \phi(t, s, x)$, em que $\phi(\cdot, s, x)$ é a solução de (2) que passa por (s, x). Nestas condições, ϕ_s^t é um isomorfismo e satisfaz:

(a) $\phi_s^s = I$

(b) $\phi_s^t \circ \phi_u^s = \phi_u^t$;

(c) $\phi_s^t = [\phi_t^s]^{-1}$.

Matriz fundamental

- Considere a equação matricial

$$X' = A(t)X, \tag{3}$$

definida em $I \times M(n)$, com $I \subseteq \mathbb{R}$. Uma solução de (3) é então um caminho $X : I \to M(n)$ e utilizaremos a notação $X(t) = [x_{i,j}]_{n\times n}$.

Matriz fundamental

- Considere a equação matricial
$$X' = A(t)X, \tag{3}$$
definida em $I \times M(n)$, com $I \subseteq \mathbb{R}$. Uma solução de (3) é então um caminho $X : I \to M(n)$ e utilizaremos a notação $X(t) = [x_{i,j}]_{n \times n}$.
- Note que o T.E.U. se aplica a tal equação com condição inicial $(t_0, X_0) \in I \times M(n)$, pois (3) equivale a
$$x'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i;k}(t)x_{k,j}, \;\; 1 \leq i,j \leq n.$$

Matriz fundamental

- Considere a equação matricial
$$X' = A(t)X, \tag{3}$$
definida em $I \times M(n)$, com $I \subseteq \mathbb{R}$. Uma solução de (3) é então um caminho $X : I \to M(n)$ e utilizaremos a notação $X(t) = [x_{i,j}]_{n\times n}$.
- Note que o T.E.U. se aplica a tal equação com condição inicial $(t_0, X_0) \in I \times M(n)$, pois (3) equivale a
$$x'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i;k}(t)x_{k,j},\ 1 \leq i,j \leq n.$$
- Temos também que $\phi(t)$ é solução de (3) se, e somente se, cada j-ésima coluna $\phi_j(t)$ de $\phi(t)$ é solução da equação (2).

Definição

Uma matriz $\phi(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas formam uma base para $\mathscr{A}$ chama-se **matriz fundamental** de (2).

TEOREMA

Sejam Φ e Ψ soluções de (3), sendo Φ fundamental. Existe uma única matriz C tal que

$$\Psi(t) = \Phi(t)C, \ \forall t \in I.$$

Em particular, C é não singular se, e somente se, Ψ é fundamental.

Teorema

Sejam Φ e Ψ soluções de (3), sendo Φ fundamental. Existe uma única matriz C tal que

$$\Psi(t) = \Phi(t)C, \ \forall t \in I.$$

Em particular, C é não singular se, e somente se, Ψ é fundamental.

Teorema

Se Φ é uma matriz fundamental de (2), então a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ de $x' = A(t)c + b$, tal que $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ é dada por

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t) \left[\Phi(t_0)^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s) ds \right]$$

Em particular, se $b \equiv 0$, então $\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} x_0$.

Teorema

Sejam Φ e Ψ soluções de (3), sendo Φ fundamental. Existe uma única matriz C tal que

$$\Psi(t) = \Phi(t)C, \ \forall t \in I.$$

Em particular, C é não singular se, e somente se, Ψ é fundamental.

Teorema

Se Φ é uma matriz fundamental de (2), então a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ de $x' = A(t)c + b$, tal que $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ é dada por

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\left[\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}b(s)ds\right]$$

Em particular, se $b \equiv 0$, então $\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$.

Fórmula de Liouville

Seja Φ uma matriz cujas colunas são soluções de $x' = A(t)x$. Dado $t_0 \in I$, vale

$$\det(\Phi(t)) = \det[\Phi(t_0)]\exp\left[\int_{t_0}^{t} trA(s)ds\right], \ t \in I.$$

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes
$$x' = Ax,\ A \in M(n). \tag{4}$$
- Denotemos por $\phi(t)$ a matriz fundamental de (4) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$.
- Se $n = 1$, $A = a$, então $\phi(t) = e^{at}$. Mostremos que, em geral, a função $t \mapsto \phi(t)$ tem propriedades análogas a exponencial.

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes

$$x' = Ax,\ A \in M(n). \tag{4}$$

- Denotemos por $\phi(t)$ a matriz fundamental de (4) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$.
- Se $n = 1, A = a$, então $\phi(t) = e^{at}$. Mostremos que, em geral, a função $t \mapsto \phi(t)$ tem propriedades análogas a exponencial.

Proposição (1)

Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental de (4) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$. Temos então:

(a) $\phi'(t) = A\phi(t)$, com $\phi(0) = I$;

(b) $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(c) $[\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(d) a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

converge para $\phi(t)$ em $\mathbb{R}$, uniformemente em cada intervalo compacto.

Definição

A exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ é por definição $\phi(1)$, ou seja, $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

Definição

A exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ é por definição $\phi(1)$, ou seja, $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

Observação

Note que podemos reescrever a Proposição 1 da seguinte forma:

(a) $\dfrac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, com $e^0 = I$;

(b) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(c) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(d) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$, sendo a convergência da série uniforme em cada intervalo compacto.

Proposição (2)

Sejam $A, B, C \in M(n)$.

(a) Se $BC = CA$, então $e^{tB}C = Ce^{tA}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Se $AB = BC$, então

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Relembrando (Fluxo)

O **fluxo** da equação $x' = f(t,x)$ é por definição a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t,u,x) = x + \int_u^t f(s,\varphi(s,u,x))ds, \tag{5}$$

sendo $\Omega = \{(t,u,x) \in \mathbb{R}^{n+2};\ t \in I(u,x),\ (u,x) \in U\} \subset \mathbb{R} \times U$.

- Note então que o fluxo da equação linear $x' = Ax$ é dado por

$$\varphi(t,x) = e^{tA}x,\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Lema (1)

O fluxo φ de $x' = Ax$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\varphi(0,x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$, para todo $s,t \in \mathbb{R}$, e todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\varphi(t,\cdot)$ é linear em $\mathbb{R}^n$.