MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

PPGM UFPR
Programa de Pós-Graduação em Matemática

DMAT - UFPR

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

25 de Abril

Aula de hoje: Conjugação de sistemas e exponencial de matrizes

Equações lineares

Definição

Dada uma matriz $A \in M(n)$, considere o sistema homogêneo

$$x' = A(t) \cdot x \tag{1}$$

e seja $\mathscr{A}$ o conjunto de todas as suas soluções.

Teorema 1

O conjunto $\mathscr{A}$ é um espaço vetorial e valem as afirmações:

(a) Dado $s \in I$, a aplicação $\Lambda_s : \mathbb{R}^n \to \mathscr{A}$ que a cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ associa a solução $\varphi(t, s, x_0)$, que passa por (s, x_0), é um isomorfismo;

(b) $dim(\mathscr{A}) = n$;

(c) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é uma base de $\mathscr{A}$, sendo

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(t, s, v_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

Exponencial de matrizes

Definição

Definimos a exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ pondo $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

Proposição 1

(a) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$, sendo a convergência da série uniforme em cada intervalo compacto.

(b) $\dfrac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, com $e^0 = I$;

(c) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(d) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

Exponencial de matrizes

Definição

Definimos a exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ pondo $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Proposição 1

(a) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, sendo a convergência da série uniforme em cada intervalo compacto.

(b) $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, com $e^0 = I$;

(c) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(d) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(e) Se $BC = CA$, então $e^{tB}C = Ce^{tA}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(f) Se $AB = BA$, então $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, valendo a recíproca.

Teorema 2

Considere o problema linear

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

A única solução deste problema é o caminho $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Em particular, o fluxo da equação $x' = Ax$ é

$$\varphi(t,x) = e^{tA}x, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

o qual satisfaz

Teorema 2

Considere o problema linear

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

A única solução deste problema é o caminho $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Em particular, o fluxo da equação $x' = Ax$ é

$$\varphi(t,x) = e^{tA}x, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

o qual satisfaz

(a) $\varphi(0,x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$, para todo $s,t \in \mathbb{R}$, e todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\varphi(t,\cdot)$ é linear em $\mathbb{R}^n$.

Conjugação

Definição

Duas matrizes $A, B \in M(n)$ são ditas conjugadas se existe $Q \in M(n)$ tal que

$$A = Q \cdot B \cdot Q^{-1}.$$

Conjugação

Definição

Duas matrizes $A, B \in M(n)$ são ditas conjugadas se existe $Q \in M(n)$ tal que

$$A = Q \cdot B \cdot Q^{-1}.$$

- A relação $A \sim B \doteq$ A e B são conjugadas é uma relação de equivalência em $M(n)$.
- Dizemos que Q conjuga A e B e escreveremos $A \sim_Q B$.

Conjugação

Definição

Duas matrizes $A, B \in M(n)$ são ditas conjugadas se existe $Q \in M(n)$ tal que

$$A = Q \cdot B \cdot Q^{-1}.$$

- A relação $A \sim B \doteq$ A e B são conjugadas é uma relação de equivalência em $M(n)$.
- Dizemos que Q conjuga A e B e escreveremos $A \sim_Q B$.

Proposição 2

Considere as equações

$$x' = Ax \ \text{ e } \ y' = By.$$

Se $A \sim_Q B$, então são equivalentes:

(a) $y(t)$ é solução de $y' = By$;

(b) $Qy(t)$ é solução de $x' = Ax$.

Proposição (3)

Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:

(a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;

(b) se $B = diag(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, então $e^A = Qdiag(e^{\kappa_1}, \ldots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;

(c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

Proposição (3)

Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:

(a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;

(b) se $B = diag(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, então $e^A = Qdiag(e^{\kappa_1}, \ldots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;

(c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

Exemplo

Considere a equação

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x.$$

Neste caso, $A \sim_Q diag(1, \ -1, \ -2)$, sendo

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3

Sejam $A \in M(n)$ uma matriz diagonalizável, isto é, $A \sim_Q D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, os vetores $v_j = Q \cdot e_j, j = 1 \ldots, n$ e os caminhos

$$s_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j,\ t \in \mathbb{R}.$$

Nestas condições, cada s_j é solução de

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = v_j, \end{cases}$$

e $\{v_1, \ldots, v_j\}$ é uma base do espaço das soluções de $x' = Ax$. Além disso,

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \ell_j s_j(t)$$

é a única solução de

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = \sum_{j=1}^{n} \ell_j v_j. \end{cases}$$

Exemplos

Exemplos

- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = diag(A_1, \ldots, A_m)$, então

$$e^A = diag(e^{A_1}, \ldots, e^{A_2}).$$

Exemplos

- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = diag(A_1, \ldots, A_m)$, então
$$e^A = diag(e^{A_1}, \ldots, e^{A_2}).$$
- Se E é uma matriz nilpotente não nula, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $A^\ell = 0$ e $A^{\ell-1} \neq 0$, então
$$e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{E^k}{k!}.$$

Exemplos

- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = diag(A_1, \dots, A_m)$, então
$$e^A = diag(e^{A_1}, \dots, e^{A_2}).$$

- Se E é uma matriz nilpotente não nula, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $A^\ell = 0$ e $A^{\ell-1} \neq 0$, então
$$e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{E^k}{k!}.$$

- Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $J(\lambda) = \lambda I + E$, sendo E nilpotente

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } e^{tJ(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Forma Canônica de Jordan 2×2

Teorema: Jordan 2×2

Sejam $A_{2\times 2}$ uma matriz real e λ_1, λ_2 são as duas raízes de seu polinômio característico. Temos então:

1. se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
2. se $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e
   (a) $dim(V_{\lambda_0}) = 2$, então $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I$.
   (b) $dim(V_{\lambda_0}) = 1$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.
3. se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$, então $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.