MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

27 DE ABRIL

Aula de hoje: Classificação de sistemas planares

Autovalores e autovetores

Definição

Seja $A \in M(n)$ uma matriz real. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A se existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Neste caso, dizemos que v é um autovetor de A associado ao autovalor λ. O auto-espaço associado a λ é, por definição,

$$V_\lambda = Nuc(\lambda I - A) = \{v \in \mathbb{R}^n;\ (A - \lambda I)v = 0\}.$$

Lema (1)

Sejam $A \in M(n)$ uma matriz real e $\lambda \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) λ é autovalor de A;

(b) existe um autovetor de A associado a λ;

(c) $Nuc(\lambda I - A) \neq \{0\}$;

(d) a matriz $\lambda I - A$ é singular;

(e) $\det(\lambda I - A) = 0$.

Proposição (1)

Sejam $A \in M(n)$ uma matriz real e v um autovetor de A associado a $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$x(t) = e^{\lambda t} v, \; t \in \mathbb{R}$$

é a solução do problema $x' = Ax$, $x(0) = v$.

Observação

- Note que denotando $[v] = \{\mu v; \; \forall \mu \in \mathbb{R}\}$, então dado qualquer $w \in [v]$ temos $x(t) = e^{t\lambda} w \in [v]$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Se $w \in V_\lambda$, então $x(t) = e^{t\lambda} w \in V_\lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Se $A \sim B$, então cada reta $[v]$ gerada por um autovetor de A corresponde a uma reta $[u]$ gerada por um autovetor u de B.

Autovalores e autovetores generalizados

Definição

Seja $A \in M(n)$ uma matriz real. Dizemos que $\gamma = a + ib \in \mathbb{C}$ é um autovalor complexo de A se este é raiz do polinômio característico

$$P_A(x) = \det(xI - A).$$

Diremos que $\omega \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ é um autovetor complexo de A associado a γ se $A\omega = \gamma\omega$.

Proposição (2)

Sejam $A \in M(n)$ uma matriz real, $\gamma \in \mathbb{C}$ e $\omega \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Então:

(a) γ é autovalor de A se, e só se, $\overline{\gamma}$ também o é;

(b) ω autovetor de A associado a γ se, e só se, $\overline{\omega}$ autovetor de A associado a $\overline{\gamma}$;

(c) se ω autovetor de A, então $\{\omega, \overline{\omega}\}$ é l.i. em $\mathbb{C}^n$.

- Dado um vetor $\omega \in \mathbb{C}^n$, então
$$u = \frac{1}{2}(\omega + \overline{\omega}) \ \text{ e } \ v = \frac{1}{2i}(\omega - \overline{\omega}) \tag{1}$$
são os únicos vetores reais tais que $\omega = u + iv$.
- Em particular, se ω é autovetor de A associado a $\gamma = a + ib$, então
$$\begin{cases} Au = au - bv \\ Av = bu + av \end{cases} \tag{2}$$

Proposição (3)

Sejam $\omega \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de $A \in M(n)$ associado ao autovalor $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$, e $u, v \in \mathbb{R}^n$ como em (1). Então
$$\begin{cases} x(t) = e^{at}[\cos(bt)u - \sin(bt)v] \\ y(t) = e^{at}[\sin(bt)u + \cos(bt)v] \end{cases}$$
definem as únicas soluções dos problemas
$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = u \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = Ay, \\ y(0) = v \end{cases},$$
respectivamente.

Exemplo

- Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$
- Neste caso, os autovalores são $\lambda = a \pm ib$ com autovetores associados
$$\omega = (1, i) \text{ e } \overline{\omega} = (1, -i).$$
- Assim, temos as soluções
$$x(t) = e^{at}(\cos(bt), -\sin(bt)) \text{ e } x(t) = e^{at}(\sin(bt), \cos(bt))$$
da equação $x' = Ax$, com condições $x(0) = e_1$ e $y(0) = e_2$, respectivamente.
- Além disso, a solução de $x' = Ax$, com $x(0) = (k_1, k_2)$ é então
$$x(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan 2×2

Teorema

Sejam $A \in M(2)$ uma matriz real e λ_1, λ_2 duas raízes de seu polinômio característico. Apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:

1. se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
2. se $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e
   - (a) $dim(V_{\lambda_0}) = 2$, então $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I$.
   - (b) $dim(V_{\lambda_0}) = 1$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.
3. se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$, então $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS PLANARES

DEFINIÇÃO

Sejam $A \in M(2)$ uma matriz real e $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma solução de $x' = Ax$ definida em $\mathbb{R}$. A **órbita** dessa solução é o conjunto

$$\mathcal{O} = \{(x_1(t), x_2(t)),\ \forall t \in \mathbb{R}\},$$

para o qual consideramos o sentido de orientação com t de $-\infty$ a $+\infty$.

- Note que em cada ponto do plano passa uma única órbita e, dadas quaisquer duas órbitas, ou elas coincidem ou são distintas.
- O **retrato de fase** da equação $x' = Ax$ é um esboço de alguma dessas órbitas.
- No que segue iremos estudar os retratos de fase da equação $x' = Ax$ considerando a decomposição de Jordan, isto é, estudando o sistema equivalente

$$y' = By,\ y(0) = (\ell_1, \ell_2)$$

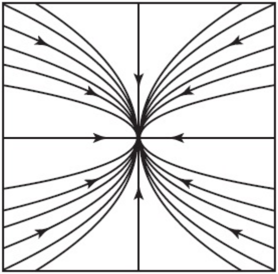
em que B assume alguma das formas

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

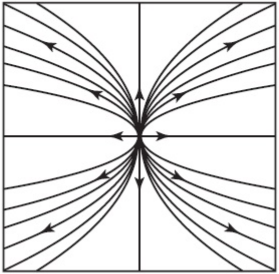
CASO 1: AUTOVALORES REAIS E DISTINTOS

- Suponha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 < \lambda_2$. Neste caso, temos $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ e a solução de $y' = By,\ y(0) = (\ell_1, \ell_2)$ é dada por $y(t) = (\ell_1 e^{\lambda_1 t}, \ell_2 e^{\lambda_2 t})$.

(1a) Assuma $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Neste caso ambas as coordenadas de $y(t)$ tendem a 0, quando $t \to \infty$, independentemente das condições iniciais. É costume dizer neste caso que este é um campo **atrator**, ou que a origem é um **poço**.



(1b) Assuma $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Neste caso ambas as coordenadas de $y(t)$ tendem a $+\infty$, quando $t \to \infty$, independentemente das condições iniciais. É costume dizer neste caso que este é um campo **repulsor**, ou que a origem é uma **fonte**.



(1c) Assuma $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. (Aqui o campo (ou a origem) é dito uma **sela**).

- Se $y(0) = (\ell_1, 0)$, então as coordenadas de $y(t)$ tendem a zero quando fazemos $t \to +\infty$.
- Se $y(0) = (0, \ell_2)$, então a segunda coordenada de $y(t)$ tendem a $+\infty$ quando fazemos $t \to +\infty$.
- Se $y(0) = (\ell_1, \ell_2)$, com $\ell_1 \ell_2 \neq 0$, então a solução tem um comportamento que "combina" o que acontece nos eixos.

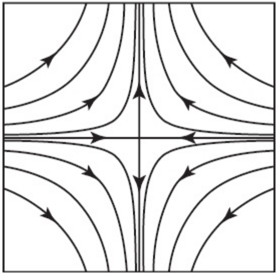


Figura: Sela

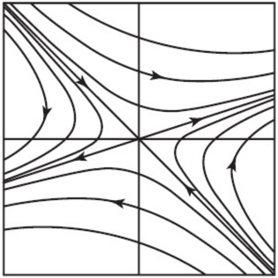


Figura: Sela Distorcida

(1d) Assuma $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = 0$. Neste caso temos

$$y(t) = (\ell_1 e^{\lambda_1 t}, \ell_2).$$

- Se $\ell_1 \neq 0$, então a solução é horizontal e tende a $(0, \ell_1)$, quando $t \to +\infty$.
- Se $\ell_1 = 0$, então a solução é constante.

(1 e) Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$, então temos um caso semelhante ao anterior.

Caso 2: autovalores reais e iguais

- Suponha $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Então temos duas possibilidades:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I, \quad \text{ou} \quad A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

  - Suponha que seja $A = \lambda I$. Neste caso, a solução do problema $x' = \lambda x$, com $x(0) = (k_1, k_2)$ é dada por

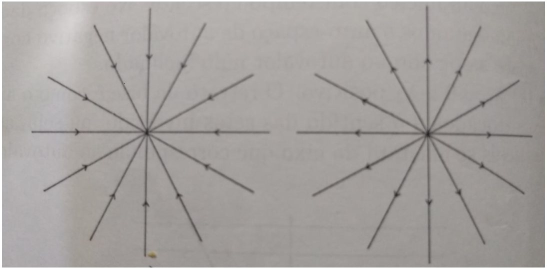
$$x(t) = e^{\lambda t}(k_1, k_2).$$

    Assim, as soluções são semi-retas na origem.

(2 a) Se $\lambda < 0$, então as coordenadas tendem a zero quando $t \to +\infty$. Neste caso temos um campo atrator e que a origem é um **foco estável**.

(2 b) Se $\lambda > 0$, então as coordenadas tendem a $+\infty$ quando $t \to +\infty$. Neste caso temos um campo pulso e que a origem é um **foco instável**.

(2 c) Se $\lambda = 0$, então A é a matriz nula e as soluções são todas constantes.



- Suponha agora que seja $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ e analisemos a equação

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} y.$$

- Tomando uma condição inicial $y(0) = (\ell_1, \ell_2)$ temos

$$y(t) = e^{\lambda t}(\ell_1, t\ell_1 + \ell_2)$$

- Fica de exercício fazer o estudo nos casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$. Veja também o exercício 23 no livro do Lopes.

Caso 3: autovalores complexos

- Suponha agora que $P_A(x)$ possua duas raízes complexas $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$, então temos o sistema conjugado

$$y' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} y.$$

- Para cada condição $y(0) = (\ell_1, \ell_2)$ temos a solução

$$y(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}.$$

(3 a) Se $a = 0$, então a solução fica girando sobre um circulo.

(2 b) Se $a < 0$, então as coordenadas tendem a 0 quando $t \to +\infty$, mas apresentando um comportamento espiral. Temos neste caso um campo **atrator** e a origem é dita **espiral estável**.

(2 c) Se $a > 0$, então as coordenadas tendem a $+\infty$ quando $t \to +\infty$, mas apresentando um comportamento espiral. Temos neste caso um campo **repulsor** e a origem é dita **espiral instável**.

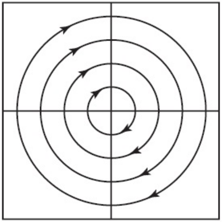


Figura: $a = 0$

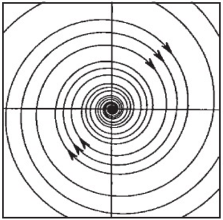


Figura: $a < 0$

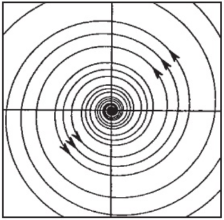
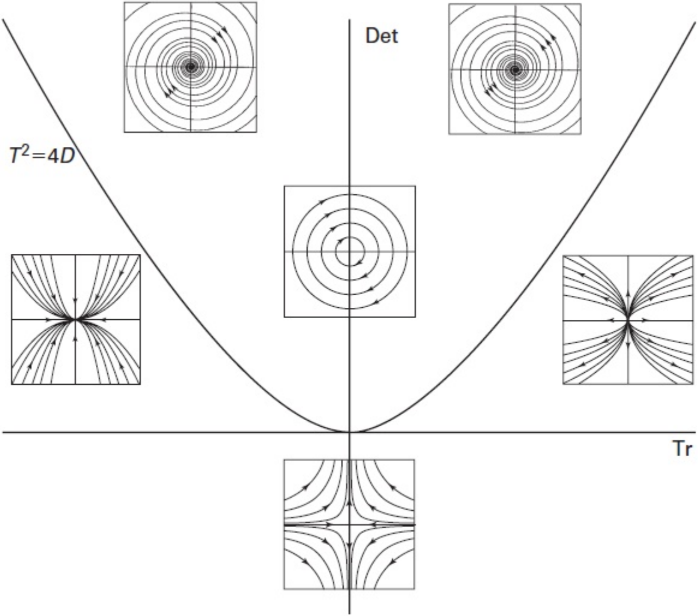


Figura: $a > 0$

- Dada uma matriz real
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
temos que seus autovalores são as raízes da equação $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$.
- Note que denotando o traço da matriz A por T e seu determinante por D essa equação é reescrita como $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$, logo suas raízes são
$$\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$
- Assim, toda a discussão anterior pode ser resumida com o estudo das seguintes possibilidades:
  1. $T^2 - 4D > 0$;
  2. $T^2 - 4D < 0$;
  3. $T^2 = 4D$.
- Assim se considerarmos um plano com pontos da forma (T, D), devemos estudar a parábola $T^2 - 4D$.


Det
$T^2=4D$
Tr