MATE 7010 - Equações Diferenciais Ordinárias - S1/2023

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

PROVA 1- Entregar até 9 de maio

Exercício 1 *Sejam $x' = Ax$ e $y' = By$ dois sistemas lineares e ϕ_A, ϕ_B os respectivos fluxos. Dizemos que estes sistemas são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\phi_B(t, h(x)) = h(\phi_A(t, x)),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assumindo que ambos são sistemas de ordem 2, mostre que:

(a) se A e B possuem os mesmos autovalores $\pm i\beta$, $\beta \neq 0$, então estes sistemas são topologicamente conjugados.

(b) E se forem autovalores $\pm i\beta$ e $\pm i\gamma$, com $\beta \neq \gamma$?

(c) E se no item anterior considerarmos $\beta = -\gamma$?

Exercício 2 *Assuma que a origem é um atrator para o sistema $x' = Ax$, isto é*

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}x\| = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Mostre que se dois sistemas são topologicamente conjugados e a origem é atrator de um deles, então também será do outro.

(b) Mostre que são equivalentes:

(i) A origem é um atrator de $x' = Ax$;

(ii) O sistema $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = -x$.

Exercício 3 *Assuma que a origem é uma fonte para o sistema $x' = Ax$, isto é*

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}x\| = \infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \neq \{0\}.$$

(a) Mostre que $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $y' = By$ se, e somente se, $x' = -Ax$ é topologicamente conjugado a $y' = -By$

(b) Mostre que são equivalentes:

(i) A origem é uma fonte de $x' = Ax$;

(ii) O sistema $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = x$.

Exercício 4 *Obtenha uma definição para as funções seno e cosseno através do T.E.U.*

Exercício 5 *Dizemos que uma solução $x(t)$ de $x' = Ax$ é periódica de existir $T > 0$ tal que $x(T) = x(0)$, mas $x(T) \neq x(0)$ para $0 < t < T$. Neste caso, T é dito o período da solução. Seja $A_{2\times 2}$ e suponha que $x' = Ax$ tem uma solução periódica.*

(a) *Mostre que A não possui autovalores reais.*

(b) *Mostre que toda solução de $x' = Ax$ é trivial, ou periódica com mesmo período T.*

Exercício 6 *Considere o sistema não homogêneo*

$$x' = Ax + b(t),$$

sendo $A \in M(n)$ e b uma função contínua.

(a) *Mostre que a solução deste sistema, com $x(0) = x_0$ é*

$$x(t) = e^{tA} \left\{ x_0 + \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \right\}.$$

(b) *Mostre que existe uma única solução periódica (de período 2π) para o caso*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & b \end{bmatrix}, \; b(t) = (0, \cos(t)),$$

sendo $b, k > 0$.

Exercício 7 *Se $v \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor da matriz $A \in \mathbb{R}^n$ e $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de $x' = Ax$ tal que*

$$x(t^*) \in \{av \in \mathbb{R}^n; a \in \mathbb{R}\},$$

para algum t^*, mostre que $x(t) \in [v]$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 8 *Sejam $A \in M(n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e denote*

$$V_\lambda = Ker(\lambda I - A) \subset \mathbb{R}^n.$$

Mostre que

(a) *V_λ é subespaço de $\mathbb{R}^n$;*

(b) *se $x \in V_\lambda$, então $Ax \in V_\lambda$;*

(c) *se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de $x' = Ax$ tal que $x(t^*) \in V_\lambda$, para algum $t^* \in \mathbb{R}$, então $x(t) \in V_\lambda$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Exercício 9 *Seja $A \in M(n)$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço tal que $A(V) \subset V$. Mostre que $e^{tA} \subset V$.*

Exercício 10 *Mostre que não existe $B \in M(2)$ tal que*

$$e^B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 11 *Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $AB = BA$. Mostre que se os fluxos dos campos lineares de A e B são contrativos, então o fluxo de $A + B$ também é.*

Exercício 12 *Dizemos que um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:*

- *contrai volume, se $\det(T) < 1$;*

- *preserva volume, se* $\det(T) = 1$*;*
- *expande volume, se* $\det(T) > 1$*.*

Assim, dizemos que o fluxo da equação $x' = Ax$ *contrai, preserva ou expande o volume em* $\mathbb{R}^n$ *se cada* e^{tA} *contrai, preserva ou expande o volume de regiões de volume finito em* $\mathbb{R}^n$*.*

Mostre que o fluxo da equação $x' = Ax$ *preserva o volume em* $\mathbb{R}^n$ *se, e somente se, o traço de* A *é nulo.*

Exercício 13 *Sejam* $A \in M(n)$ *invertível e* $b \in \mathbb{R}^n$*. Mostre que*

$$x(t) = e^{tA}x_0 + (e^{tA} - I)A^{-1}b$$

é a única solução de $x' = Ax + b$*, com* $x(0) = x_0$*.*