CMM202 - CMI 062 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Entregar até dia 16 de novembro

Exercício 1 *Utilizando indução, mostre que:*

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demonstre que $n^3 + 5n$ *é divisível por 6, para cada* $n \in \mathbb{N}$. *(Você pode assumir que um número é divisível por 6 se, e somente se, o é por 2 e 3 ao mesmo tempo).*

(c) $n \geqslant 5 \Longrightarrow n^2 < 2^n$;

Exercício 2 *Denote por* $|A|$ *o número de elementos de um conjnto finito* A. *Sejam* X_1 *e* X_2 *conjuntos finitos.*

(a) Mostre que se $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, *então* $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2|$.

(b) De modo geral, $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$.

Exercício 3 *Dados* $a, b \in \mathbb{N}$, *prove que existe um número natural* m *tal que* $ma > b$.

Exercício 4 *Um elemento* $a \in \mathbb{N}$ *chama-se antecessor de* $b \in \mathbb{N}$ *se* $a < b$ *e não existe* $c \in \mathbb{N}$ *tal que* $a < c < b$. *Prove que, exceto o 1, todo número natural possui um antecessor.*

Exercício 5 *Seja* $\mathcal{A}$ *o conjunto dos números algébricos, isto é,* $x \in \mathcal{A}$ *se existem inteiros* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *não todos nulos, tais que*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Mostre que $\mathcal{A}$ *é enumerável.*

Dicas:

- *Considere o conjunto* $P^n(\mathbb{Z})$ *dos polinômios de grau* $\leqslant n$, *com coeficientes inteiros;*
- *Construa uma bijeção* $\mathbb{Z}^{n+1} \to P^n(\mathbb{Z})$;
- *Conclua que o conjunto* $P(\mathbb{Z})$ *dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável.*
- *Dado um elemento* $f \in P(\mathbb{Z})$, *associe* f *ao conjunto* R_f *formado por todas as suas raízes.*