CMM202 - CMI 062 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3: Entregar até o dia 22 de fevereiro

Exercício 1 *Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

(a) *Mostre que $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$, para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$.*

(b) *Mostre que o conjunto $Z(f) = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0\}$ é fechado.*

(c) *Suponha f sobrejetiva e A é um subconjunto denso em $\mathbb{R}$. Mostre que $f(A)$ é denso em $\mathbb{R}$. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é outra função contínua e sobrejetiva tal que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, então $f \equiv g$.*

Exercício 2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.*

(a) *Mostre que se f é contínua, então o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \leqslant \alpha\}$ é fechado, seja qual for o número $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(b) *Mostre que se f é contínua e $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $f^{-1}(A)$ é aberto.*

(c) *Suponha que para todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ tenhamos que $f^{-1}(A)$ é aberto. Mostre que f é contínua.*

Exercício 3 *Suponha f e g duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b). Mostre que se $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$.*

Exercício 4 *Suponha f uma função definida em $\mathbb{R}$ que satisfaz a desigualdade*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é constante.