CMM202 - CMI 062 Análise I

Professor:

**Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

---

PROVA 1: 19 de dezembro

---

**Exercício 1 (20 pontos)** *Utilizando indução, mostre que:*

*(a)* $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

**Exercício 2 (20 pontos)** *Sejam* $A$ *um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}$ *e* $A_0 \subset A$, *não vazio. Mostre que*

$$\inf(A) \leqslant \inf(A_0) \leqslant \sup(A_0) \leqslant \sup(A)$$

**Exercício 3 (20 pontos)** *Dado* $A \subset \mathbb{R}$ *defina por* $A^-$ *a interseção de todos os conjuntos fechados que contém* $A$. *Mostre que* $A^-$ *é um conjunto fechado.*

**Exercício 4 (20 pontos)** *Sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}$.

*(a)* $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

*(b) Vale a inclusão* $\overline{X} \cap \overline{Y} \subset \overline{X \cap Y}$? *Justifique.*

**Exercício 5 (40 pontos)** *Considere as seguintes definições:*

*(i) Dizemos que uma sequência de números reais* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para um número* $x \in \mathbb{R}$ *se vale a seguinte propriedade: para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n \geq N \Longrightarrow |x - x_n| < \epsilon.$$

*Neste caso, utilizamos a notação* $x_n \to x$.

*(ii) Dizemos que* $p \in \mathbb{R}$ *é ponto limite de um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *se existe* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *tal que* $x_n \to p$. *Denotamos por* $\widetilde{A}$ *o conjunto de todos os pontos limites de* $A$.

*Verifique as seguintes afirmações:*

*(a) se* $p \in \mathbb{R}$ *é um ponto aderente de um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$, *então existe uma sequência de pontos* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *tal que* $x_n \to p$. *Essa sequência é necessariamente não constante?*

*(b) Um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *é fechado se, e somente se,* $A = \widetilde{A}$.