

---

**Prova 2: 1º de fevereiro**

---

**Exercício 1 (40 pontos)** *Sejam  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  seqüências de números reais. Mostre que:*

(a) *se  $x_n \rightarrow a$  e  $a \neq 0$ , então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \neq 0$ , para todo  $n \geq N$ .*

(b) *se  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  são convergentes, com  $x_n \leq y_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então*

$$\lim(x_n) \leq \lim(y_n);$$

(c) *mostre que se as séries  $\sum x_n$  e  $\sum y_n$  são convergentes, então  $\sum(x_n + y_n)$  é convergente.*

**Exercício 2 (40 pontos)** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita contínua num ponto  $p \in \mathbb{R}$  se satisfaz a seguinte propriedade:*

- *Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que*

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}; |x - p| \leq \delta.$$

(a) *Mostre que se  $f$  é contínua em  $p$  e  $x_n \rightarrow p$ , então a seqüência  $\{f(x_n)\}$  converge para  $f(p)$ .*

(b) *Mostre que se para toda seqüência  $\{x_n\}$  convergente para  $p$  tivermos que  $\{f(x_n)\}$  converge para  $f(p)$ , então  $f$  é contínua em  $p$ .*

**Exercício 3 (40 pontos)** *Mostre que um conjunto  $K \subset \mathbb{R}$  é compacto se, e somente se, toda seqüência  $\{x_n\} \subset K$  possui uma subsequência que converge para algum ponto de  $K$ .*

(Dica 1) *Utilize o teorema de Bolzano-Weierstrass.*

(Dica 2) *Utilize que um conjunto  $F$  é fechado se, e somente se, toda seqüência convergente de pontos de  $F$  converge para algum ponto de  $F$ .*