CMM202 - CMI 062 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 3: 22 de fevereiro

Exercício 1 (20 pontos) *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto. Mostre que:*

(a) se A é compacto, então $f(A)$ é compacto.

(b) se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $f^{-1}(A)$ é aberto.

Exercício 2 (20 pontos) *Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(r+s) = f(r)f(s)$, para todo $r, s \in \mathbb{Q}$. Mostre que*

$$f(x+y) = f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3 (20 pontos) *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [b,c] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $f(b) = g(b)$. Mostre que a função $h : [a,c] \to \mathbb{R}$, dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in [a,b], \\ g(x), & se \quad x \in [b,c] \end{cases}$$

é contínua em $[a,b]$;

Exercício 4 (20 pontos) *Suponha f uma função definida em $\mathbb{R}$ que satisfaz a desigualdade*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é constante.

Exercício 5 (20 pontos) *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que f só é diferenciável em $x = 0$ e calcule $f'(0)$.