`CMM202 - CMI 062 Análise I`

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

`LISTA 1:`
`Números naturais, indução, conjuntos finitos e infinitos`

Exercício 1 *Demonstre que*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 2 *Demonstre que* $n^3 + 5n$ *é divisível por 6, para cada* $n \in \mathbb{N}$. *(Você pode assumir que um número é divisível por 6 se, e somente se, o é por 2 e 3 ao mesmo tempo).*

Exercício 3 *Dado um número natural* p, *seja* $Y \subset \mathbb{N}$ *um conjunto que satisfaz:*

a) $p \in Y$;

b) $n \in Y$ *implica em* $n + 1 \in Y$.

Mostre que Y *contém todos os naturais maiores ou iguais a* p. *Utilize este resultado para mostrar que*

Prove que:

(a) $n \geqslant 4 \Longrightarrow n! > 2^n$;

(b) $n \geqslant 2 \Longrightarrow 2n \leq 2^n$;

(c) $n \geqslant 5 \Longrightarrow n^2 < 2^n$;

Exercício 4 *Se* X *é um conjunto infinito, então existe uma função injetiva* $f : \mathbb{N} \to X$.

Exercício 5 *Seja* X *um conjunto finito. Mostre que* $X \cap Y$ *é um conjunto finito, seja qual for o conjunto* Y.

Exercício 6 *Considerando uma função* $f : X \to Y$, *prove:*

(a) *Se* X *é infinito e* f *injetiva, então* Y *é infinito;*

(b) *Se* Y *é infinito e* f *sobrejetiva, então* X *é infinito;*

Exercício 7 *Denote por* $\#(A)$ *o número de elementos de um conjnto finito* A. *Sejam* X_1 *e* X_2 *conjuntos finitos.*

(a) *Mostre que se* $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, *então* $\#(X_1 \cup X_2) = \#(X_1) + \#(X_2)$.

(b) *De modo geral,* $\#(X_1 \cup X_2) = \#(X_1) + \#(X_2) - \#(X_1 \cap X_2)$.

Exercício 8 *Dados os números naturais* a, b*, prove que existe um número natural* m *tal que* $ma > b$*.*

Exercício 9 *Um elemento* $a \in \mathbb{N}$ *chama-se antecessor de* $b \in \mathbb{N}$ *se* $a < b$ *e não existe* $c \in \mathbb{N}$ *tal que* $a < c < b$*. Prove que, exceto o* 1*, todo número natural possui um antecessor.*

Exercício 10 *Mostre que não existe um maior número primo.*

Exercício 11 *Seja* X *um conjunto com* n *elementos. Prove que o conjunto das bijeções* $f : X \to X$ *possui* $n!$ *elementos.*

Exercício 12 *Prove que se* A *tem* n *elementos, então* $\mathcal{P}(A)$ *tem* 2^n *elementos.*

Teorema 1 *Considere a seguinte definição:*

Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ *é dito limitado quando existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $p \geq n, \forall n \in X$*.*

A respeito de um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ *não vazio, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) X *é finito;*

b) X *é limitado;*

c) X *possui um maior elemento.*

Exercício 13 *Considerando uma função* $f : X \to Y$*, prove:*

(a) Se X *é infinito e* f *injetiva, então* Y *é infinito;*

(b) Se Y *é infinito e* f *sobrejetiva, então* X *é infinito;*

Exercício 14 (Desafio) *Seja* $\mathbb{N}'$ *um conjunto para o qual existe uma função* $s' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$ *satisfazendo os axiomas* $P1$*,* $P2$ *e* $P3$*. Denote por* $1'$ *o elemento de* $\mathbb{N}'$ *que satisfaz* $P2$*.*

a) Mostre que existe uma única bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ *tal que* $f(1) = 1'$ *e* $f(s(n)) = s'(f(n))$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

b) Verifique que f *satisfaz as seguintes propriedades:*

b1) $m < n \Longrightarrow f(m) < f(n)$*;*

b2) $f(m + n) = f(m) + f(n)$*;*

c3) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$*;*

Obs: as operações $+$*,* $\cdot$ *e* $<$ *em* $\mathbb{N}'$ *são construídas de forma semelhante ao que foi feito em* $\mathbb{N}$*.*

Exercício 15 *Leitura:* ***O Grande Hotel Georg Cantor***

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural. Todos eram igualmente confortáveis. Num final de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um viajante. O recepcionista vai logo dizendo:

- Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, a gerente interveio:

- Podemos abrigar o cavalheiro, sim senhor.

- Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o 3 e assim em diante. Quando estiver no quarto n*, mude para o quarto* $n+1$*. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado.*

Logo depois chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. O recepcionista, tendo aprendido a lição, removeu o hóspede de cada quarto n *para o quarto* $n+30$ *e acolheu todos os passageiros do ônibus. Mas ficou sem saber quando, horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Desesperado, apelou para a gerente que prontamente resolveu o problema dizendo: - Passe cada hóspede do quarto* n *para o quarto* $2n$*. Isto deixará vagos todos os apartamentos de número ímpar, nos quais poremos os novos hóspedes.*

- Pensando melhor: mude quem está no quarto n *para o quarto* $3n$*. Os novos hóspedes, ponha-os no quarto de número* $3n+2$*. Deixaremos vagos os quartos de número* $3n+1$*. Assim sobrarão ainda infinitos quartos vazios e eu poderei ter sossego por algum tempo.*