CMM202 - CMI 062 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3:
Topologia da reta

Exercício 1 *Dados* $X, Y \subset \mathbb{R}$, *mostre que* $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ *e* $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$*;*

Exercício 2 *Mostre que se* $X \subset F$ *e* F *é fechado, então* $\overline{X} \subset F$*;*

Exercício 3 *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}$ *dois conjuntos abertos. Mostre que* $A+B$ *e* $A \cdot B$ *são conjuntos abertos;*

Exercício 4 *Dados* $A, B \subset \mathbb{R}$, *prove que:*

(a) se A *é compacto e* B *fechado, então* $A + B$ *é fechado;*

(b) se A *e* B *são compactos, então* $A + B$ *e* $A \cdot B$ *são compactos;*

(c) se A *é fechado e* B *é compacto, então* $A \cdot B$ *pode não ser compacto;*

Exercício 5 *Mostre que* $\mathbb{Z}$ *é um conjunto fechado de* $\mathbb{R}$*;*

Exercício 6 *Mostre que* $\mathbb{Q}$ *não é um conjunto aberto e nem um conjunto fechado de* $\mathbb{R}$*;*

Exercício 7 *Sejam um conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *e um ponto* $p \in \mathbb{R}$. *Dizemos que* p *é um ponto de fronteira de* A *se toda bola aberta centrada em* p *contém pontos de* A *e de* A^c. *O conjunto de todos estes os chamado de fronteira de* A *e denotado por* ∂A.

(a) Determine $\partial \mathbb{Q}$*;*

(b) Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \in \mathbb{Q}, \quad e \quad x, y \in [0, 1]\}$. *Determine* ∂A*;*

(c) Mostre que A *é aberto se, e somente se, não possui nenhum dos seus pontos de fronteira;*

(d) Mostre que A *é fechado se, e somente se,* $\partial A \subset A$*;*

Exercício 8 *Sejam um* $A \subset \mathbb{R}$ *e* A^o *o conunto de todos os pontos interiores de* A, *o qual é chamado de interior de* A

(a) Mostre que A *é um conjunto aberto se, e somente se,* $A^o = A$*;*

(b) Mostre que: $A^o \subset A$, $(A^o)^o = A^o$ *e* $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$*;*

(c) Mostre que $(A \cup B)^o \subset A^o \cup B^o$*;*

(d) Obtenha um A *tal que* $A^o = \emptyset$*;*

Exercício 9 *Dado* $A \subset \mathbb{R}$ *defina por* A^- *a interseção de todos os conjuntos fechados que contém* A.

(a) Mostre que A^- é um conjunto fechado;

(b) Mostre que $x \in A^-$ se, e somente se, $x \in A^o$ ou $x \in \partial A$;

Exercício 10 *Considere as funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por*

$$f(x) = ax + b \ (a \neq 0), \ g(x) = x^2 \quad e \quad h(x) = x^3.$$

(a) Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $f^{-1}(A)$, $g^{-1}(A)$ e $h^{-1}(A)$ são abertos.

(b) O item anterior vale para A fechado?

(c) Se A é aberto, então $f(A)$ e $h(A)$ são abertos.

(d) Se K é compacto, então são compactos: $f(K)$, $g(K)$, $h(K)$, $f^{-1}(K)$, $g^{-1}(K)$ e $h^{-1}(K)$.

Exercício 11 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é não enumerável, então A' também é não enumerável;*

Exercício 12 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ então $\overline{A} \setminus A'$ é enumerável (pode também ser finito);*

Exercício 13 *Obtenha uma coleção $\{K_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de compactos de $\mathbb{R}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ não é compacto;*

Exercício 14 *Seja $\{K_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção de compactos de $\mathbb{R}$ tal que $K_{n+1} \subset K_n$. Prove que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$;*

Exercício 15 *Seja $K \neq \emptyset$ um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Prove que $\inf(K), \sup(K) \in K$;*

Exercício 16 *Obtenha dois conjuntos fechados $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}$ tais que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ e*

$$\inf\{|x_1 - x_2|,\ x_1 \in F_1 \quad e \quad x_2 \in F_2\} = 0;$$