CMM202 - CMI 062 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4:
Sequências

Exercício 1 *Calcule* $\lim(x_n)$*, sendo* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definda sa seguinte forma:*

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{1+1},\quad x_3 = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\ \ldots,\ x_n = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\cdots+\dfrac{1}{1+1}}}$$

Exercício 2 *Considere a sequência (de Fibonacci)* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definda sa seguinte forma:* $f_1 = 1,\ f_2 = 2$ *e* $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n,\quad$ *se* $\ n \geqslant 2$*. Calcule* $\lim(f_{n+1}/f_n)$*;*

Exercício 3 *Suponha que* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de números reais. Prove que se* x *é convergente, então a sequência* $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *também o é. O contrário é verdadeiro?*

Exercício 4 *Sejam* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências de números reais. Mostre que:*

(a) *se* $x_n \to a$ *e* $x_n \geqslant 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $a \geqslant 0$*;*

(b) *se* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são convergentes, com* $x_n \leqslant y_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então*

$$\lim(x_n) \leqslant \lim(y_n);$$

(c) *se existe outra sequência* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfazendo*

$$\lim(x_n) = \lim(z_n) = a \quad e \quad x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

então $\lim(y_n) = a$*;*

(d) $\lim \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$*;*

Exercício 5 *Mostre que para cada* $a \in \mathbb{R}$ *existe uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de termos racionais convergindo para* a*;*

Exercício 6 *Sejam* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sequências de Cauchy de números reais. Defina a seguinte relação:*

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(|x_n - y_n|) = 0.$$

Mostre que:

(a) $x \sim x$, *(b)* $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, *(c)* $x \sim y$ *e* $y \sim z \Rightarrow x \sim z$,

sendo $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de Cauchy;*

Exercício 7 *Mostre que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *se, e somente se,* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$*;*

Exercício 8 *Mostre que a sequência* $\{1 + (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *não é uma sequência de Cauchy;*

Exercício 9 *Mostre que a sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *não é limitada, então existe um subsequência* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} 1/x_{n_k} = 0$*;*

Exercício 10 *Suponha que* $\lim a_n = \infty$ *e* $\{b_n\}$ *limitada inferiormente, então* $\lim(a_n + b_n) = \infty$*;*

Exercício 11 *Suponha que* $\lim a_n = \infty$ *e* $b_n > c > 0$*, então* $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$*;*

Exercício 12 *Se* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim(1/a_n) = 0$*;*

Exercício 13 *Suponha* $a_n > 0$ *e* $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então*

(a) *se* $a_n > c$*, para algum* c*, e* $\lim b_n = 0$ *então* $\lim(a_n/b_n) = \infty$*;*

(b) *se* x_n *é limitada e* $\lim b_n = \infty$ *então* $\lim(a_n/b_n) = 0$*;*

Exercício 14 *Mostre que as seguintes séries são convergentes:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$*;* *(c)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + n)$*;*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$*, se* $p \geqslant 2$*;* *(c)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n!)$*;*

Exercício 15 *Mostre que as seguintes séries não são convergentes:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$*;* *(b)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$*, se* $0 < p \leqslant 1$*;*

Exercício 16 *Mostre que se* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *são convergentes, então* $\sum(x_n + y_n)$ *é convergente;*

Exercício 17 *Suponha que* $\sum x_n$ *seja convergente e* $x_n > 0$*. Definindo* $y_n = (x_1 + \ldots x_n)/n$ *mostre que é convergente;*

Exercício 18 *Suponha que* $\sum x_n$ *seja convergente e* $x_n > 0$*. Definindo* $y_n = (x_1 + \ldots x_n)/n$ *mostre que* $\sum y_n$ *é convergente;*

Exercício 19 *Verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$*;* *(c)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/[(n+1)(n+2)]$*;*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 - n + 1)$*;* *(c)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$*, se* $p > 0$*;*

Exercício 20 *Se* $\sum x_n$ *é convergente e* $x_n > 0$*, então é verdade que* $\sum(x_n)^2$ *é convergente?*

Exercício 21 *Se* $\sum x_n$ *é convergente e* $x_n > 0$*, então é verdade que* $\sum \sqrt{x_n}$ *é convergente?*

Exercício 22 *Demosntre o seguinte resultado:*

Teorema 1 *Suponha que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sejam sequências de termos não nulos tais que existe*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n}{y_n}\right|$$

(a) se $r \neq 0$*, então* $\sum x_n$ *converge absolutamente se, e somente se,* $\sum y_n$ *converge absolutamente;*

(b) se $r = 0$*, e* $\sum y_n$ *é absolutamente convergente, então* $\sum x_n$ *converge absolutamente;*

Exercício 23 *Demosntre o seguinte resultado:*

Teorema 2 *Se* $\lim |x_n|^{1/n} < 1$*, então* $\sum x_n$ *converge absolutamente;*

Exercício 24 *Demosntre o seguinte resultado:*

Teorema 3 *Suponha que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de termos não nulos tais que existe*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|.$$

Se $r < 1$*, então* $\sum x_n$ *converge absolutamente. Se* $r > 1$*, então* $\sum x_n$ *diverge;*

Exercício 25 *Para quais valores* $a \in \mathbb{R}$ *a série* $\sum_{na^n}$ *converge?*

Exercício 26 *Suponha que* $\sum (x_n)^2$ *e* $\sum (y_n)^2$ *convergem. Mostre que* $\sum x_n y_n$ *converge absolutamente;*