CMM202 - CMI 062 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5:
Continuidade

Exercício 1 *Suponha* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$. *Mostre que* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim_{x\to c} |f(x) - L| = 0$.

Exercício 2 *Considere uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Mostre que* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim_{x\to 0} f(x + c) = L$;

Exercício 3 *Considere uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *tais que* $\lim_{x\to c}(f(x))^2 = L$.

(a) *Mostre que se* $L = 0$, *então* $\lim_{x\to c} f(x) = 0$;

(c) *Obtenha um exemplo em que* $L \neq 0$ *e não exista* $\lim_{x\to c} f(x)$;

Exercício 4 *Sejam* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$. *Suponha que* f *seja limitada numa vizinhança de* c *e que* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$. *Mostre que* $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = 0$;

Exercício 5 *Sejam* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$.

(a) *Mostre que se existem os limites* $\lim_{x\to c} f(x)$ *e* $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x))$, *então existe* $\lim_{x\to c} g(x)$;

(c) *O mesmo vale para o produto?*

Exercício 6 *Considere as funções reais*

$$f(x) = x + 1 \quad e \quad g(x) = \begin{cases} 2, & se \quad x \neq 1, \\ 0, & se \quad x = 1 \end{cases}$$

(a) *Calcule* $\lim_{x\to 1} g(f(x))$ *e compare com* $g\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right)$;

(c) *Calcule* $\lim_{x\to 1} f(g(x))$ *e compare com* $f\left(\lim_{x\to 1} g(x)\right)$;

Exercício 7 *Sejam* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *uma função e* $p \in \mathbb{R}$.

(a) *Obtenha uma definição para " F é contínua no ponto p";*

(b) *Escrevendo* $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, *sendo* $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *mostre que* F *é contínua em* p *se, e somente se, cada uma das* f_j *é contínua em* p;

(c) *Mostre que uma função linear* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é contínua em* $\mathbb{R}^n$;

Exercício 8 *Suponha que uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaça a seguinte propriedade: Existe um $M>0$ tal que*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$;

Exercício 9 *Suponha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua.*

(a) *Mostre que $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$, para qualquer conjunto $A\subset\mathbb{R}$;*

(b) *Se $Z(f)$ denota o conjunto de zeros de f, então $Z(f)$ é fechado;*

(c) *Suponha f sobrejetiva e e A é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$, mostre então $f(A)$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é outra função contínua e sobrejetiva. Mostre que se $f(a)=g(a)$ para todo $a\in A$, então $f=g$;*

(d) *Suponha que $f(r)=0$, para todo $r\in\mathbb{Q}$. Mostre que $f(x)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$;*

Exercício 10 *Considere o intervalo $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ e uma função contínua $f:I\to I$. Mostre que existe $c\in I$ tal que $f(c)=c$;*

Exercício 11 *Sejam $a<b<c$ e duas funçõe contínuas $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g:[b,c]\to\mathbb{R}$, tais que $f(b)=g(b)$. Mostre que a função $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, dada por*

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & se\ \ x\in[a,b],\\ g(x), & se\ \ x\in[b,c]\end{cases}$$

é contínua em $[a,b]$;

Exercício 12 *Considere a função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por*

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}.$$

É possível definir f em $x=2$ de modo que f seja contínua?

Exercício 13 *Mostre que a função $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ é contínua;*

Exercício 14 *Verifique em quais pontos as seguintes funções são contínuas*

(a) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$;

(b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+|\sin(x)|}}{x}$, $x\neq 0$;

Exercício 15 *Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita aditiva se $f(x+y)=f(x)+f(y)$, para todo $x,y\in\mathbb{R}$. Mostre que se f é contínua num ponto $a\in\mathbb{R}$, então ela é contínua em todo $\mathbb{R}$;*

Exercício 16 *Considere uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte propriedade*

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(a) *Mostre que se f é contínua em $x=0$, então é contínua em $\mathbb{R}$;*

(b) *Em particular, se $f(a)=0$, para algum $a\in\mathbb{R}$, então $f(x)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$;*

Exercício 17 *Mostre que se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua, então o conjunto $\{x\in\mathbb{R};\ f(x)\leqslant\alpha\}$ é fechado, seja qual for o número $\alpha\in\mathbb{R}$;*