CMM202 - CMI 062 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 6:
Diferenciabilidade

Exercício 1 *Suponha f e g duas funções definidas no intervalo $[a,b]$ e diferenciáveis num ponto $x_0 \in [a,b]$. Mostre que as seguintes funções são diferenciáveis em x_0:*

(a) $f+g$; *(b)* cf, *para uma constante c qualquer;*

Exercício 2 *Considere $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções diferenciáveis num ponto x_0. Obtenha as seguintes derivadas:*

(a) $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(x_0)$; *(b)* $(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)'(x_0)$; *(c)* $(f_1 \cdot f_2 \ldots f_n)'(x_0)$;

Supondo $f_1 = f_2 = \ldots = f_n$ obtenha $(f^n)'(x_0)$. Aplique este resultado para obter a derivada de $g(x) = x^n$.

Exercício 3 *Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$, para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0)x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De*

Exercício 4 *Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k vezes derivável, tal que $f(tx) = t^k f(x)$, para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = [f^{(k)}(0)/k!]x^k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De*

Exercício 5 *Suponha f e g duas funções continuas no intervalo $[a,b]$ e diferenciáveis em (a,b). Mostre $x_0 \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x)$$

Exercício 6 *Suponha f e g duas funções continuas no intervalo $[a,b]$ e diferenciáveis em (a,b). Mostre que se $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a,b)$, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$.*

Exercício 7 *Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e derivável em $\mathbb{R}$. Mostre que f' é uma função ímpar;*

Exercício 8 *Mostre que a função $f(x) = x^{1/3}$ não é diferenciável em 0;*

Exercício 9 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant c, \\ ax + b, & x > c. \end{cases} \quad (\ a,\ b,\ \text{e } c \text{ constantes}\ )$$

Obtenha os valores de a e b (em termos de c) tais que exista $f'(c)$.

Exercício 10 *Verifique em quais pontos as seguintes funções são diferenciáveis.*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Exercício 11 *Suponha f uma função definida em $\mathbb{R}$ que satisfaz a desigualdade*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é constante.

Exercício 12 *Suponha f e g funções reais tais que existem $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$, com $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Mostre que*

$$\lim_{t \to x_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Exercício 13 *Considere a e c números reais, com $C > 0$, e a $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\dfrac{1}{|x|^c}\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Prove as seguintes afirmações

(a) f é contínua se, e somente se, $a > 0$;

(b) $f'(0)$ existe, e somente se, $a > 1$;

Exercício 14 *As funções abaixo estão definidas em $\mathbb{R}$. Para cada uma, obtenha os pontos extremantes (derivada igual a zero) e os intervalos onde elas são crescentes e aqueles onde são decrescentes.*

(a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$;

(b) $f_2(x) = 3x - 4x^2$;

(c) $f_3(x) = \cos(x)$;

(d) $f_4(x) = \sin(x)$;

Exercício 15 *Considere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais e a função f defida em $\mathbb{R}$ por*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (a_j - x)^2.$$

Exsite máximo? Existe mínimo?

Exercício 16 *Esboce o gráfico da função $f(x) = 1/(x^2+1)$.*

Exercício 17 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ no intervalo I. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leqslant K$ para todo $x \in I$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para $x, x_0 \in I$ vale*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Exercício 18 *Dê uma demosntração de que $f'' \geqslant 0$ implica f convexa usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.*

Exercício 19 *Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau n. Prove que para todo $a, x \in \mathbb{R}$ vale para $x, x_0 \in I$ vale*

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exercício 20 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $f_n : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Suponha que, para cada $x \in I$, a sequência $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente. Prove que a função $f : I \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

é convexa. Prove um resultado análogo para funções côncavas.

Exercício 21 *Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Exercício 22 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se contração quando existe uma constante $k \in [0, 1)$ tal que $|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$, para todo $x, y \in X$.*

(a) Mostre que se f é derivável no intervalo I e $|f'(x)| \leqslant k < 1$ então f é uma contração.

(b) Suponha que $X \subset \mathbb{R}$ é fechado e $f : X \to X$ é uma contração. Mostre que, fixado $x_0 \in X$, a sequência

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1),\ \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n)$$

converge para um ponto $a \in X$ tal que $f(a) = a$;

(c) Prove que toda contração $f : X \to X$, $X \subset \mathbb{R}$ fechado, possui único pointo fixo, isto é, existe único $a \in X$ tal que $f(a) = a$;

Exercício 23 *Prove que $1,0754$ é um valor aproximado, com 4 algarismos, da raiz positiva da equação $x^6 + 6x - 9 = 0$;*

Exercício 24 *Considere a função $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ dada por $x - x^3$ a qual anula-se em $x = 0$. Aplique o método de Newton começando com $x_0 = \sqrt{5}/5$;*