Universidade Federal do Paraná

Notas de aula
(ainda em preparação!)

Análise na Reta

Higidio Portillo Oquendo
http://people.ufpr.br/~higidio

Última atualização: 11 de novembro de 2016

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conjuntos e Funções

Um conjunto é uma coleção de objetos. A seguir, serão usadas as seguintes notações:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, denota o conjunto dos números naturais.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, denota o conjunto dos números inteiros.
- $\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$, denota o conjunto dos números racionais.
- $\mathbb{R}$, denota o conjunto dos números reais.

Escrevemos:

1. $x \in A$, quando o elemento x pertence ao conjunto A
2. $A \subset B$, quando todo elemento de A pertence a B (A é subconjunto de B)
3. $A \subsetneq B$, quando todo elemento de A pertence a B porém existe algum elemento em B que não pertence a A (A é subconjunto próprio de B)

Exemplo: Consideremos os seguintes conjuntos

$$A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{4n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Provemos que $B \subsetneq A$. De fato, seja $x \in B$, então $x = 4n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, porém este pode ser escrito da forma $x = 2(2n) = 2m$, onde claramente $m = 2n \in \mathbb{N}$, logo $x \in A$, Agora vejamos que $\exists x \in A$ tal que $x \notin B$; tomamos $x = 2 = 2(1) \in A$ provemos que este não pertence a B. Procedamos usando o argumento do absurdo (ou contradição), isto é, suponhamos que $x = 2 \in B$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 = 4n$, porém esta igualdade somente é satisfeita se n for o número racional $n = 1/2$ o qual no pertence a $\mathbb{N}$, fato que nos fornece uma contradição. Portanto $A \subset B$.

operações em conjuntos

1. União: $A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$
2. Interseção: $A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}$
3. Complemento relativo: $A \setminus B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\}$
4. Produto cartesiano: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad \text{e} \quad b \in B\}$

5. União infinita: $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : x \in A_n \quad \text{para algum} \quad n \in \mathbb{N}\}$

6. Interseção infinita: $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : x \in A_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\}$

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais, e escrevemos $A = B$, se eles contém os mesmos elementos, isto é

$$A \subset B \quad \text{e} \quad B \subset A$$

Exemplo: Sejam A, B e C tres conjuntos, vejamos que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

De fato, mostremos primeiro $\subset$: seja $x \in A \cap (B \cup C)$, logo $x \in A$ e $x \in B \cup C$, este último indica que $x \in B$ ou $x \in C$. Se $x \in B$ então $x \in A \cap B$ e portanto $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, similarmente, se $x \in C$ então $x \in A \cap C$ e portanto $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dai que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Obtenhamos agora a outra inclusão, $\supset$: Seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, então $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Qualquer que seja o caso, $x \in A$ porem x pode pertencer a B ou C ou ambos, então $x \in B \cup C$, logo $x \in A \cap (B \cup C)$.

Uma função f, com *domínio* $D_f \subset X$ e *contradomínio* Y, é uma relação que a cada elemento x do conjunto D_f associa un único elemento $f(x)$ do conjunto Y. Neste caso, escrevemos

$$\begin{array}{rcl} f : D_f \subset X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Uma função estará caracterizada pelo seu domínio, e sua regra de correspondência. Quando para uma função se forneça unicamente uma regra de correspondência sem especificar qual é o seu domínio, assumiremos que seu domínio é o maior conjunto de X onde a regra de correspondência faz sentido. Funções reais de variável real são funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais.

Observações:

1. Por ejemplo, se consideramos uma função real de variável real e para descreve-la unicamente escrevemos $f(x) = \sqrt{x-1}$ sem especificar o domínio, o domínio neste caso será $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < \infty\}$ que é o maior conjunto onde a regra de correspondência faz sentido.

   As funções $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ e $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ são as mesmas?

2. Nem todos os elementos do contradomínio Y estão necessáriamente relacionados com um elemento de D_f, por exemplo

   $$f : [-1, 4[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)^2.$$

   O elemento $y = -1/2$ de $Y = \mathbb{R}$ não é é atingido pela função, pois não existe $x \in D_f = [-1, 2[$ tal que $f(x) = -1/2$. Também, neste exemplo, dois elementos de D_f podem estar relacionados com um único elemento de Y: para $y = 1 \in Y$ existem $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$ de D_f tais que $f(x_1) = y = f(x_2)$.

Dada a função $f : D_f \to Y$ e os subconjuntos $A \subset D_f$ e $B \subset Y$, denotaremos

1. $f(A) := \{f(x) : x \in D_f\}$: Imagem de A atravez de f.

2. $f^{-1}(B) := \{x \in D_f : f(x) \in B\}$: Imagem inversa de B atravez de f.

Mostremos que

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

Seja $y \in f(A_1 \cap A_2)$, logo existe $x \in A_1 \cap A_2$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in A_1$ então $y = f(x) \in f(A_1)$ e como $x \in A_2$ então $y = f(x) \in f(A_2)$, portanto $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Os conjuntos acima podem nao coincidir, pois por exemplo se consideramos a função $f(x) = x^2$ e os subconjuntos $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$ então $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, logo $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$, porém

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}, \\ f(A_2) &= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 4\}, \\ f(A_1) \cap f(A_2) &= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\} \end{aligned}$$

Seja $f : D_f \to Y$, Dizemos:

1. f é injetiva, se para $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2. f é sobrejetiva, se $f(D_f) = Y$.

3. f é bijetiva se for injetiva e sobrejetiva.

Dada uma função injetiva $f : D_f \to Y$ sabemos que para $y \in f(D_f)$ existe um único $x \in D_f$ tal que $f(x) = y$. Assim definimos a função inversa $f^{-1} : f(D_f) \to D_f$ dada por $f^{-1}(y) = x$.

Dadas duas funções $f : D_f \to Y$, $g : Y \to Z$, definimos a composição de funções $g \circ f : D_f \to Z$ como sendo

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad \forall x \in D_f$$

1.2 Números Naturais principio de indução

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é definido como um conjunto que atende os seguintes axiomas:

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (s é chamada de função sucessor)

2. Existe um único elemento $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ tem um primeiro elemento).

3. Se um conjunto $W \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in W$ e $s(W) \subset W$ (ou $s(n) \in W$, $\forall n \in W$), então $W = \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ $s(n)$ chama-se *o sucessor de n*. Estas propriedades são conhecidas como *os axiomas de Peano*. O axioma 3 é conhecida como *o princípio de indução*.

Estes 3 axiomas sã suficientes para definir soma e produto de elementos em $\mathbb{N}$ e uma ordem entre seus elementos "$<$". Por exemplo a soma é o produto são definido de forma recursiva:

$$m + 1 := s(m), \quad m + s(n) := s(m + n)$$
$$m \cdot 1 := m, \quad m \cdot (n + 1) := m \cdot n + m$$

Assim as notações que adotaremos (com a qual já estamos acostumados) são

$$1, \quad 2 = s(1), \quad 3 = s(2), \ldots$$

O princípio de indução matemática é uma ferramenta poderosa para estabelecer a validade de alguma afirmação indexada aos números naturais. Uma das suas principais consequências é que $\mathbb{N}$ satisfaz o **princípio do bom ordenamento** que consiste em que subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo, isto é, se $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$, então existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$. Mostremos este fato. Seja $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in A$ não a nada a provar pois 1 seu menor elemento. Se $1 \notin A$ Denotemos com W o conjunto dos índices $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap I_n = \emptyset$ onde

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Claramente $1 \in W$. Se $n + 1 \in W$ para todo $n \in W$, pelo princípio de indução teriamos que $W = \mathbb{N}$ e portanto

$$A \cap I_n = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{A \cap \mathbb{N}}_{=A} = \emptyset,$$

o qual é absurdo, pois $A \neq \emptyset$. Portanto existe $n \in W$ tal que $n + 1 \notin W$ o qual significa que $n + 1$ pertence a A e é seu primeiro elemento.

com as novas notações o **Principio de Indução** pode ser escrito da seguinte forma: Se $X \subset \mathbb{N}$ satisfazendo

1. $1 \in W$.
2. Se $n \in W$ implica que $n + 1 \in W$.

Então necessariamente $W = \mathbb{N}$.

Exemplo: : Mostremos que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja W o conjunto de números naturais para a qual é valida a igualdade anterior. Claramente $1 \in W$, suponhamos então que $k \in W$, isto é,

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

vejamos que $k + 1 \in W$. De fato

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)(k/2 + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Logo, pelo princípio de indução matemática temos que $W = \mathbb{N}$, isto a igualdade ? vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

No que segue $\mathbb{Z}$ a extensão do conjunto dos números naturais com operações de soma e produto de tal forma que todo natural tenha um inverso aditivo. Essas operações de soma e produto são compatíveis com as operações de soma e produto utilizadas no dia a dia. Assim $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

En alguns casos, algumas afirmações são válidas apenas para $n \geq n_0$ onde $n_0 \in \mathbb{Z}$. Neste caso podemos usar uma versão equivalente ao principio de indução, a qual pode ser enunciada da seguinte forma:

Principio de Indução (versão 2). Seja $W \subset \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$ tal que

1. $n_0 \in W$.

2. Se $k \in W$ implica que $k+1 \in W$.

Então $W = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$.
Exemplo: : Seja $x \geq -1$, vejamos que a desigualdade de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1 + nx$ é valida para $n \geq 0$. De fato, Seja W o conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a zero que satisfazem a desigualdade anterior. Claramente $0 \in W$, suponhamos então que $k \in W$, mostremos que $k+1 \in W$. De fato,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Logo, pelo princípio de indução (versão 2) temos que $W = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, isto a desigualdade ? vale para todo $n \geq 0$.
Principio de Indução Forte. Seja $W \subset \mathbb{N}$ tal que

1. O número $1 \in W$.

2. Se $1, \ldots, k \in W$ implica que $k+1 \in W$.

Então $W = \mathbb{N}$.
Exemplo: Considere os números x_n definidos por $x_1 := 1$, $x_2 := 2$ e $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$ para $n \geq 2$. Mostremos que $1 \leq x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, Se denotamos com

$$W = \{n \in \mathbb{N} : \text{ tal que } 1 \leq x_n \leq 2\},$$

então vemos que $1, 2 \in W$. Suponhamos que $1, \ldots, n \in W$ com $n \geq 2$, mostremos que $n+1 \in W$. de fato, como

$$1 + 1 \leq x_n + x_{n-1} \leq 2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \leq 1 \leq \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \leq 2,$$

isto é $1 \leq x_{n+1} \leq 2$, portanto $n+1 \in W$. Pelo princípio de indução forte temos que $X = \mathbb{N}$.

1.3 Conjuntos Finitos, Infinitos e Enumeráveis

No que segue usaremos a notação

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Definição: Consideremos um conjunto X nao vazio. Dizemos que um conjunto X é finito se podemos estabelecer uma bijeção entre X e algum I_n, isto é, se existe uam bijeção $f : I_n \to X$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Neste caso dizemos que X **tem** n **elementos** e o conjunto X pode ser escrito da forma $X = \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$. Quando não é possível estabelecer uma bijeção entre X e algum I_n dizemos que X é infinito. Convencionamos que o conjunto vazio $\emptyset$ é finito e tem 0 elementos.

Observe que se $g : X \to Y$ é uma bijeção e um desses dois conjuntos é finito, então o outro também será finito. De fato, se X é finito então existe uma bijeção tal que $f : I_n \to X$, então $g \circ f : I_n \to Y$ será uma bijeção e portanto Y é finito.

Theorem 1.3.1 *Se existe uma bijeção $f : X \to Y$ então para $a \in X$ e $b \in Y$ fixados, existe uma bijeção $g : X \to Y$ tal que $g(a) = b$.*

Proof: Se $f(a) = b$ a conclusão do lema é verdadeiro. Caso $f(a) \neq b$, construimos $g : X \to Y$ dada por

$$g(a) = b, \quad g(f^{-1}(b)) = f(a) \quad \text{e} \quad g(x) = f(x) \quad \forall x \in X,\ x \neq a,\ x \neq f^{-1}(b).$$

Deixamos ao leitor como exercício mostrar que g é uma bijeção. □

Theorem 1.3.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$, não existe bijeção entre I_n e um subconjunto próprio.*

Proof: Seja W o conjunto de índices $n \in \mathbb{N}$ tal que há uma bijeção I_n com algum subconjunto próprio dele. Suponhamos que $W \neq \emptyset$, logo pelo princípio do bom ordenamento de $\mathbb{N}$, consideremos n_0 o menor número natural que pertence a W. Asim existe uma bijeção $f : I_{n_0} \to A$ onde $A \subsetneq I_{n_0}$. Se $n_0 \in A$ pelo Lema anterior podemos considerar que $f(n_0) = n_0$, asim a restrição $f : I_{n_0-1} \to A \setminus \{n_0\}$ continua sendo uma bijeção com $A \setminus \{n_0\} \subsetneq I_{n_0-1}$ o que contradiz a minimalidade de n_0. Se $n_0 \notin A$ então $f : I_{n_0-1} \to A \setminus \{f(n_0)\}$ contínua sendo uma bijeção com $A\setminus\{f(n_0)\} \subsetneq I_{n_0-1}$ o que também contradiz a minimalidade de n_0. □

Corollary 1.3.3 *O número de elementos de um conjunto finito é único.*

Proof: Procedamos pelo absurdo, seja $A \neq \emptyset$ um conjunto finito tal que existem bijeções $f : I_n \to A$ e $g : I_m \to A$, com $n \neq m$. Suponhamos que $n < m$, consideramos $g^{-1} \circ f : I_n \to I_m$ a qual é uma bijeção entre I_m e o subconjunto próprio I_n a qual contradiz o teorema ?. Logo necessariamente $n = m$. □

Theorem 1.3.4 *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Proof: Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto finito e $a \in X$, mostremos primeiro que $X \setminus \{a\}$ é finito. Por X ser finito existe uma bijeção $f : I_n \to X$ e pelo lemma ? podemos considerar que $f(n) = a$, assim $f : I_{n-1} \to X \setminus \{a\}$ é uma bijeção, logo $X \setminus \{a\}$ é finito. O caso geral o mostramos por indução sobre o numero de elementos dos conjuntos. Se um conjunto tiver $n = 1$ elementos, os subconjuntos seriam o vazio ou ele próprio os quais são finitos. Supondo que todo subconjunto de um conjunto de k elementos é finito, vejamos que todo subconjunto de um conjunto X de $k + 1$ elementos também é finito. De fato, Seja $Y \subset X$, se $Y = X$ não há nada que provar, caso contrário, se $Y \subsetneq X$ existe $a \in X$ tal que $a \notin Y$ então $Y \subset X \setminus \{a\}$, como $X \setminus \{a\}$ tem k elementos, pela hipotese indutiva temos que Y é finito. □

Corollary 1.3.5 *Seja $f : X \to Y$.*

1. *Se Y é finito e f injetiva, então X é finito.*
2. *Se X é finito e f sobrejetiva, então Y é finito.*

Proof: **Item 1**: Como $f : X \to Y$ é injetiva então $f : X \to f(X)$ é uma bijeção. Dado que $f(X) \subseteq Y$ pelo teorema anterior $f(X)$ é finito e portanto X é finito.
Item 2: Como $f : X \to Y$ é sobrejetiva então para cada $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que $f(x) = y$, assim para cada y escolhemos um único elemento x_y entre os elementos x que satisfazem a relação $f(x) = y$. Isto define uma função $g : Y \to X$ dada por $g(y) = x_y$. Nestas condições g é tal que $f(g(y)) = f(x_y) = y$ para todo $y \in Y$ e portanto g é injetiva (prove!). Logo pelo primeiro item, dado que X é finito, temos que Y é finito. □

Theorem 1.3.6 $\mathbb{N}$ *é infinito*

Proof: Procedamos pelo absurdo. Suponhamos que $\mathbb{N}$ é finito, então existe uma bijeção $f : I_n \to \mathbb{N}$, isto é $\mathbb{N} = \{f(1), \ldots, f(n)\}$, $m = \max\{f(i) : i \in I_n\}$ então $m \in \mathbb{N}$ e portanto $m+1 \in \mathbb{N}$, porem não existe $i \in I_n$ tal que $f(i) = m+1$, isto é, f não é sobrejetiva o que entra em contradição com o fato de ser bijeção. □

Vejamos agora que, $\mathbb{N}$ é o "menor conjunto infinito".

Theorem 1.3.7 *Se X é um conjunto infinito, então existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Proof: escolhemos $x_1 \in A_1 := X$ pois este conjunto é não vazio e definimos $f(1) = x_1$. Da mesma forma escolhemos $x_2 \in A_2 := X \setminus \{f(1)\}$ pois este conjunto não é vazio, pois X é infinito e definimos $f(2) = x_2$. Seguindo recursivamente com este processo para $n \geq 3$, tomamos $x_n \in A_n := X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$ pois este conjunto não é vazio e definimos $f(n) = x_n$. Nestas condições a função f é injetiva. De fato, se $n \neq m$ digamos $m < n$ então $f(m) \in \{f(1), \ldots, f(n-1)\}$, porem $f(n) \notin \{f(1), \ldots, f(n-1)\}$, portanto $f(m) \neq f(n)$. □

Definição: Um conjunto X se diz que é enumerável se é possível estabelecer uma bijeção com $\mathbb{N}$, isto é, se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Neste caso, f é chamado de uma enumeração de X e se denotarmos por $x_n := f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Exemplo:

1. O conjunto $2\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$ (naturais pares) é enumerável, pois $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ definido por $f(n) = 2n$ é uma bijeção.

2. O conjunto dos inteiros é enumerável já que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(1) = 0$, $f(2n) = n$ e $f(2n+1) = -n$ é uma bijeção.

Definição: Dizemos que um conjunto X é contável, se for finito ou enumerável.

Theorem 1.3.8 *Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ é contável.*

Proof: Seja $X \subseteq \mathbb{N}$, se X for finito não há nada que mostrar. Caso X seja infinito. Defino a função $f : \mathbb{N} \to X$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
f(1) &= \min X \\
f(2) &= \min[X \setminus \{f(1)\}] \\
f(3) &= \min[X \setminus \{f(1), f(2)\}] \\
&\vdots \\
f(n+1) &= \min[X \setminus \{f(1), f(2), \ldots f(n)\}] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ésta função assim definida é injetiva. Observe que $n \leq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Prove usando indução!). Seja $m_0 \in X$ vejamos que $m_0 \in \{f(1), \ldots, f(m_0)\}$ o qual mostraria que f é sobrejetiva. Procedamos pelo absurdo, isto é, suponhamos que $m_0 \notin \{f(1), \ldots, f(m_0)\}$, logo $m_0 \in X \setminus \{f(1), \ldots, f(m_0)\}$ e portanto $f(m_0+1) \leq m_0$. Como $m_0 + 1 \leq f(m_0+1)$ segue que $m_0 + 1 \leq m_0$ o que é absurdo. □

Corollary 1.3.9 *Todo subconjunto de um conjunto enumerável é contável.*

Proof: Seja X enumerável e seja $A \subset X$. Desde que existe uma bijeção $f : X \to \mathbb{N}$ temos que $f : A \to f(A)$ contínua sendo uma bijeção. Como $f(A) \subset \mathbb{N}$ então $f(A)$ é contável logo existe uma bijeção, g, entre $f(A)$ e algumn I_n ou $\mathbb{N}$, assim $g \circ f$ é uma bijeção de A com algumn I_n ou $\mathbb{N}$, logo A é contável. □

Corollary 1.3.10 *Seja $f : X \to Y$ onde X eY são conjuntos infinitos.*

1. *Se Y é enumerável e f injetiva, então X é enumerável.*
2. *Se X é enumerável e f sobrejetiva, então Y é enumerável.*

Proof: A prova é similar a prova do Corolário 1.3.5 pela qual fica como exercício para o leitor. □

Corollary 1.3.11 *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é tambem enumerável.*

Proof: Mostremos primeiro que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Consideremos a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $h(n, m) = 2^n 3^m$, nestas condições h é injetiva por causa da unicidade da decomposição de um número em fatores primos, logo pelo corolário anterior $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Agora, sejam X e Y enumeráveis, logo exitem sobrejeções $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$ então definimos $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ dada por $h(n, m) = (f(n), g(m))$. Nestas condições h é sobrejetiva o que implica, pelo corolário anterior, que $X \times Y$ é enumerável. □

Exemplo: $\mathbb{Q}$ é enumerável pois a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(m, n) = m/n$ é sobrejetiva.

Corollary 1.3.12 *A reunião enumerável de uma família de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Proof: Seja $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ conjuntos enumeráveis, logo exitem sobrejeções $f_i : \mathbb{N} \to X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Denotemos com $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$, mostremos que este conjunto é enumerável. De fato, basta definir a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ dada por $f(n, m) = f_n(m)$ a qual é sobrejetiva, e pelo corolário ? X é enumerável. □

Exemplo: Nem todo conjunto infinito é enumerável. Para ilustrar este fato, consideremos S o conjunto da sequências infinitas cujos elementos são números binários, isto é, os elementos de S são da forma: $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots)$ onde α_m é ou 0 ou 1. Suponhamos que S é enumerável, logo, ele pode ser enumerado da forma $S = \{a^1, a^2, \ldots, a^n, \ldots\}$ onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $a^n = (\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_m^n, \ldots)$. Formemos a nova sequência $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots)$ dada por $\beta_m = 1 - \alpha_m^m$. Claramente $b \in S$ e como $\beta_m \neq \alpha_m^m$ temos que $b \neq a^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, isto é $b \notin S$ o que é uma contradição.

O metódo usado no exemplo anterior é conhecido como: processo da diagonal de Cantor.

Exemplo: O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável, para isso basta mostrar que o intervalo $]0, 1[$ não é enumerável. Usaremos o processo da diagonal de Cantor. Em primer lugar, adotaremos a representação decimal infinita da seguinte forma:

$$0,37 = 0,36999\ldots, \quad 0,831 = 0,830999\ldots$$

Esta representação é única. Agora procedamos pelo absurdo, suponhamos que o conjunto das representações decimais infinitas do intervalo $]0,1[$ seja enumerável, logo podemos enumerar seus elementos, isto é, $]0,1[=\{a_1, a_2, \dots\}$ onde

$$\begin{gathered} a_1 = 0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}\dots \\ a_2 = 0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}\dots \\ \vdots \\ a_n = 0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\alpha_{n4}\dots \\ \vdots \end{gathered}$$

Consideremos o número decimal $b = 0, \beta_1\beta_2\beta_3\dots$, onde para cada $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j = 6$ quando $\alpha_{jj} = 5$ e $\beta_j = 5$ quando $\alpha_{jj} \neq 5$, assim $\beta_j \neq \alpha_{jj}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e portanto $b \neq a_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, isto é $b \notin]0,1[$ a qual é uma contradição.

1.4 Exercícios

Seção 1.1

1. Sejam A e B dois conjuntos, mostre que

   (a) $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$.

   (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

   (c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2. Seja $f : A \to B$ uma função e $E, F \subseteq A$ and $G, H \subseteq B$. Mostre que

   (a) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$.

   (b) $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$.

   (c) $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.

   (d) Se f é injetiva então $f^{-1}(f(E)) = E$.

   (e) Se f é sobrejetiva então $f(f^{-1}(G)) = G$.

3. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções. Mostre que

   (a) Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.

   (b) Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

   (c) Se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva. Atravez de um contra exemplo mostre que o recíproco não é verdadeiro.

   (d) Se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

   (e) Se $g \circ f$ é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

Seção 1.2

1. Usando o princípio de indução, prove que

   (a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{4n^3 - n}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (d) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (e) $1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = \dfrac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

2. Prove a fórmula do Binômio de Newton: Sejam $a, b \geq 0$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}, \text{ onde } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

3. Prove que

   (a) $n^3 + 5n$ é divisível por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $5^{2n} - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. prove as seguintes desigualdades
   (a) $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $2^n < n!$ para todo $n \geq 4,\ n \in \mathbb{N}$.

5. Sejam $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m_1 < m_2$. Considere os números x_n definidos por $x_1 := m_1$, $x_2 := m_2$ e $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$ para $n \in \mathbb{N}$. Usando o princípio de indução forte, mostre que $m_1 \leq x_n \leq m_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Sejam $m_1, m_2, \ldots, m_s$ fixados em $\mathbb{N}$, considere os números x_n definidos por
$$x_1 = m_1,\ x_2 = m_2, \ldots\ x_s = m_s, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_{n-s}}{s},\ \text{para } n > s.$$
   Mostre que
$$\min_{1 \leq i \leq s} m_i \leq x_n \leq \max_{1 \leq i \leq s} m_i \text{ para todo } n \geq s+1.$$

7. Prove que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^n = n!$ para todo $n \geq 0$.

8. Use o principio da boa ordenação de $\mathbb{N}$ para mostrar que: dados $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$ ou n é múltiplo de m ou existem $q, r \in \mathbb{N}$ com $r < n$ tal que $n = mq + r$. Prove que q e r são únicos com esta propriedade.

9. Prove o princípio de indução com uma consequência do princípio da boa ordenação.

Seção 1.3

1. Sejam A e B dois conjuntos finitos disjuntos de n e m elementos respectivamente, mostre que $A \cup B$ tem $n + m$ elementos.

2. Seja $A \subset B$ onde A e B tem n e m elementos respectivamente, mostre que $B \setminus A$ tem $m - n$ elementos. Deduza daqui que $n \leq m$.

3. Sejam A e B dois conjuntos finitos de n e m elementos respectivamente. Se $A \cap B$ tem k elementos, mostre que $A \cup B$ tem $n + m - k$ elementos.

4. Sejam A e B dois conjuntos finitos de n e m elementos, mostre que $A \times B$ tem nm elementos.

5. Seja X um conjunto, denotemos com $\mathcal{P}(X)$ o conjunto onde seus elementos são todos os subconjuntos de X.
   (a) Seja $X = \{1, 2, 3\}$ determine os 8 elementos de $\mathcal{P}(X)$.
   (b) Mostre usando indução que, se X tem n elementos então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^n elementos.

6. Estabeleça uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números naturais ímpares maiores que 5.

7. Suponha que existem funções injetivas $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : X \to \mathbb{N}$. Mostre que X é enumerável.

8. Se A é um conjunto enumerável e B um conjunto contável, mostre que $A \cup B$ é enumerável. Use este fato para mostrar que o conjunto dos irracionais não é enumerável.

9. Denote com $\mathcal{F}$ o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Mostre que $\mathcal{F}$ é enumerável.

10. Mostre que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é enumerável. Dica: estabeleça uma bijeção entre o conjunto S das sequências com algarismos binários e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ da seguinte forma: $\alpha \mapsto B$ sendo que se o termo na posição n da sequência α é 1, então n pertence ao conjunto B, caso contrário n não pertence a B, por exemplo

$$(0, 1, 1, 0, 1, \ldots) \mapsto \{2, 3, 5, \ldots\}.$$

Exercícios Adicionais

1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que no existe número natural m tal que $n < m < n + 1$.

2. Mostre que $n \leq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ no Teorema 1.3.8.

3. Mostre o Corolário 1.3.10.

Capítulo 2

Corpos Ordenados, Números Reais

2.1 Números racionais

O conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} := \{n/m : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$$

dotado das operações binárias de adição e multiplicação:

$$\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} := \frac{n_1 m_2 + n_2 m_1}{m_1 m_2}, \quad \frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{n_2}{m_2} := \frac{n_1 n_2}{m_1 m_2},$$

tem uma série de propriedades algébricas que satisfazem os conjuntos chamados de corpos que descrevemos a seguir.

Definição: [Corpos] Um conjunto K munido de duas operações binárias chamadas de adição "+" e multiplicação "·":

$$+ : \begin{array}{ccc} K \times K & \to & K \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array}, \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} K \times K & \to & K \\ (a, b) & \mapsto & a \cdot b \end{array},$$

é dito corpo se satisfaz cada dos seguintes axiomas

(A1) **Existência de elementos neutros**. Existe $0 \in K$ chamado de elemento neutro aditivo e $1 \in K$ chamado de elemento neutro multiplicativo, com $1 \neq 0$, satisfazendo

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a, \quad \forall a \in K.$$

(A2) **Existência de elementos inversos**. Aditivo: para cada $a \in K$ existe um elemento denotado por $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$. Multiplicativo: para cada $a \in K$, $a \neq 0$, existe um elemento denotado por $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

(A3) **Propriedades comutativas, asociativas e distributiva**.
Comutativa: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in K$.
Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in K$.
Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo $a, b, c \in K$.

Exercício: Deixamos pro leitor verificar que $\mathbb{Q}$ é um corpo com a adição é multipicação introduzidas acima.

Observe que, num corpo K, ainda podemos introduzir otras duas operações binárias:

1. Substração: $a - b := a + (-b)$ para $a, b \in K$.

2. Divisão: $a/b := a \cdot b^{-1}$ para $a, b \in K$, $b \neq 0$.

Algumas propriedades:

1. Vejamos que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in K$. De fato,

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

somando $-(a \cdot 0)$ temos que $a \cdot 0 = 0$.

2. Se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$. De fato, suponha $a \neq 0$, então multiplicando por a^{-1} cada membro de $a \cdot b = 0$ temos que

$$b = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

"O conjunto $\mathbb{Q}$ é insuficiente para expressar qualquer medição"

Para ilustrar esta afirmação consideremos um triângulo retângulo cujos catetos tem comprimento igual a 1, vejamos o comprimento da hipotenusa, h, não pode ser expressado por um número racional. Usemos o argumento do absurdo, isto é, suponhamos que h é um número racional n/m com n e m co-primos (o único número natural que divide estes números simultaneamente é o 1). Então, pelo teorema de Pitágoras tem-se que $(n/m)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, de onde seque que $n^2 = 2m^2$. Isto implica que n^2 é par e portanto n é par (prove!), logo $n = 2r$ com $r \in \mathbb{N}$ que ao ser substituído resulta em $4r^2 = 2m^2$, logo $m^2 = 2r^2$, ísto é m^2 é par e portanto m é par, desta forma n e m não podem ser co-primos, isto contradiz nossa suposição sobre h. Observe que acabamos de mostrar que

$$\text{não existe } n/m \in \mathbb{Q} \text{ tal que } \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2. \tag{1.1}$$

o qual será usado posteriormente.

Esta deficiência dos números racionais estimulou a construção de um conjunto maior que contenha, alem de $\mathbb{Q}$, números que possam expressar qualquer medição, porem mantendo a mesma estrutura de $\mathbb{Q}$, isto é, continuando a ser um corpo. Para introduzir este novo conjunto precisaremos introduzir alguns conceitos adicionais.

2.2 Corpos Ordenados, Supremos e Ínfimos

Um corpo K é ordenado se contem um subconjunto P, chamado *subconjunto dos elementos positivos* de K, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\forall a, b \in P$, $a + b \in P$ e $a \cdot b \in P$.

2. Dado $x \in K$ somente ocorre uma das tres posibilidades: ou $x \in P$, ou $-x \in P$, ou $x = 0$.

Observações:

- Se denotamos com $-P = \{x : -x \in P\}$ chamado de *subconjunto dos elementos negativos* temos que $K = P \cup \{0\} \cup (-P)$.

- $0 \notin P$.

- $1 \in P$. De fato, como $1 + (-1) = 0$ logo $(-1) + (-1) \cdot (-1) = 0$ somando 1 em ambos lados temos que $(-1) \cdot (-1) = 1$, assim se $-1 \in P$ então necessariamente $(-1) \cdot (-1) = 1 \in P$ o qual é absurdo, portanto $1 \in P$.

Exemplo: O conjunto $P = \{m/n : m, n \in \mathbb{N}\}$ é o subconjunto de elementos positivos de $\mathbb{Q}$, pois satisfaz as propriedades acima, portanto $\mathbb{Q}$ é ordenado.

Theorem 2.2.1 *1. Se $x \in P$ então $x^{-1} \in P$.*

2. Para qualquer $x \in K$ com $x \neq 0$ tem-se que $x^2 \in P$.

Proof: Seja $x \in P$. Se $x^{-1} \notin P$ então $-x^1 \in P$, logo $x(-x^{-1}) = -1 \in P$ ($\Rightarrow\Leftarrow$). Agora, seja $x \in K$ tal que $x \neq 0$, logo ou $x \in P$ ou $-x \in P$. Se $x \in P$ segue que $xx = x^2 \in P$ e se $-x \in P$, temos que $(-x)(-x) = x^2 \in P$. □

Em corpos ordenados K estabelecemos uma relação de ordem entre seus elementos definida da seguinte forma: se $a, b \in K$, dizemos que a é maior que b e escrevemos $a < b$, se $b - a \in P$. Tendo em conta esta definição introduzimos as relações de ordem adicionais:

menor ou igual:	$a \leq b$, se $a < b$ ou $a = b$.
maior:	$a > b$, se $b < a$.
maior ou igual:	$a \geq b$, se $b < a$ ou $a = b$.

Observe que, se denotamos com $K^+ = \{x \in K : x > 0\}$, segue que $K^+ = P$.

Vejamos algumas das propriedades desta relação.

Theorem 2.2.2 *Seja K um corpo ordenado.*

1. *Sejam $a, b \in K$ então, ou $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.*

2. *Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.*

3. *Se $a < b$ então $a + c < b + c$ para todo $c \in K$.*

4. *Se $a < b$ então $a \cdot c < b \cdot c$ para todo $c > 0$.*

Proof: Seja P o conjunto dos elementos positivos considerado em K

1. Como $b - a \in K$ então, ou $b - a \in P$ ou $b - a = 0$ ou $-(b - a) = a - b \in P$.

2. Por hipótese, $b - a \in P$ e $c - b \in P$ portanto a soma $b - a + (c - b) = c - a \in P$.

3. Da hipótese temos que $b - a \in P$ e portanto $b + c - (a + c) = b - a \in P$

4. Por hipótese $b - a \in P$ e $c \in P$ portanto o produto $(b - a) \cdot c = bc - ac \in P$.

□

Cotas superiores e inferiores: Seja A um subconjunto de um corpo ordenado K. Dizemos que $\beta \in K$ é uma cota superior de A se $a \leq \beta$, $\forall a \in A$ e neste caso dizemos que A é um conjunto limitado superiormente. Analogamente, dizemos que $\alpha \in K$ é uma cota inferior de A se $\alpha \leq a$, $\forall a \in A$ e neste caso dizemos que A é um conjunto limitado inferiormente. O conjunto A é dito limitado se for limitado superiormente e inferiormente.

Definição: [Supremos e ínfimos de um conjunto]

1. Se A é um conjunto limitado superiormente, à menor cota superior β_0 deste conjunto chamamos de *supremo de* A e é denotado por $\beta_0 = \sup A$, isto é, β_0 é tal que

$$a \leq \beta_0 \leq \beta, \quad \forall a \in A, \text{ e para toda cota superior } \beta \text{ de } A.$$

2. Se A é um conjunto limitado inferiormente, à maior cota inferior α_0 deste conjunto chamamos de *ínfimo de* A e é denotado por $\alpha_0 = \inf A$, isto é, α_0 é tal que

$$\alpha \leq \alpha_0 \leq a, \quad \forall a \in A, \text{ e para toda cota inferior } \alpha \text{ de } A.$$

Exemplo: No corpo $\mathbb{Q}$, consideremos $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$. Vejamos que $\sup A = 1$. De fato, é claro que 1 é uma cota superior de A, suponhamos que existe uma cota superior de A, $\alpha \in \mathbb{Q}$, tal que $\alpha < 1$ (observe que $\alpha \geq 0 \in A$), então para n suficientemente grande temos que $\alpha + 1/n < 1$, porêm $\alpha + 1/n \in A$ o qual entra em contradição com o fato de α ser uma cota superior. Portanto $\alpha \geq 1$, isto é 1 é a menor cota superior. Deixamos ao leitor mostrar que $\inf A = 0$.

Exemplo: No corpo $\mathbb{Q}$ consideremos o subconjunto de $\mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. Vejamos que A não possui ínfimo. Para isso usemos o argumento do absurdo, isto é, suponhamos que existe $p/q \in \mathbb{Q}$ tal que $p/q = \inf A$, como 0 é uma cota inferior de A segue que $p/q \geq 0$. Vimos anteriormente que $(p/q)^2 \neq 2$, então $(p/q)^2 > 2$ ou $(p/q)^2 < 2$, isto é, $p/q \in A$ ou $p/q \in B$, onde $B = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$. Note que B é um subconjunto de cotas inferiores de A (prove!).

1. Se $\dfrac{p}{q} \in A$, vejamos que $\dfrac{p}{q}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \in A$ para algum $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, o qual fornece uma contradição com o fato de p/q ser o ínfimo de A. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{p}{q}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \in A \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{p^2(n-1)^2}{n^2q^2} > 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (p^2 - 2q^2)n^2 - 2p^2n + p^2 > 0. \end{aligned}$$

   Como $p^2 - 2q^2 > 0$, esta desigualdade é válida para n sufientemente grande.

2. Se $p/q \in B$, seguindo o mesmo raciocínio anterior é possível mostrar que $\frac{p}{q}(1 + \frac{1}{n}) \in B$ para algum n suficientemente grande e portanto é uma cota inferior. Isto contradiz o fato de p/q ser a maior cota inferior de A.

Estos dois casos mostram que $p/q \notin A \cup B$. Logo p/q não pode ser o ínfimo de A. Este exemplo mostra que nem todos os subconjuntos limitados inferiormente do corpo $\mathbb{Q}$ possui ínfimo.

2.3 Números Reais

O conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, é um corpo ordenado que contem $\mathbb{Q}$ satisfazendo o seguinte postulado

Postulado de Dedekind: todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, constituído de elementos positivos tem um ínfimo.

O postulado leva esse nome, pois foi Dedekind quem construiu um corpo ordenado contendo $\mathbb{Q}$ satisfazendo este postulado. Para isso ele usou subconjuntos apropriados de $\mathbb{Q}$ os quais chamou de "cortes". Ele considerou o conjunto

$$C = \{\text{todos os cortes possíveis}\},$$

e definiu neste operações apropriadas de adição e multiplicação para torna-o um corpo, depois introduzindo uma relação de equivalência conseguiu encontrar o corpo que estende $\mathbb{Q}$. (Na construção seu postulado é na verdade o chamado Teorema de Dedekind). Pode-se mostrar que quaisquer dois corpos ordenados que estendem $\mathbb{Q}$ satisfazendo o Postulado de Dedekind são isomorfos, isto é existe uma bijeção entre estes corpos preservando a estrutura). Portanto, podemos dizer que o corpo $\mathbb{R}$ é único. Um corte, segundo Dedekind é um subconjunto de $A \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$
2. se $r \in A$, então $s \in A$ para todo $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s < r$
3. dado $r \in A$ existe $t \in A$ tal que $r < t$

Um exemplo de corte é dado pelo conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \text{ ou } x < 0\}$.

Propriedades de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ **é completo**, isto é, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente (superiormente) possui ínfimo (supremo). De fato, seja $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado inferiormente. Seja $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_0 < x$ para todo $x \in A$. Se $\alpha_0 \geq 0$, então $A \subset \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, logo o postulado de Dedekind garante a existência de um ínfimo. Por outro lado, se $\alpha_0 < 0$, consideramos o conjunto $B = \{x - \alpha_0 : x \in A\}$. Nestas condições $B \subset \mathbb{R}^+$ e portanto possui um ínfimo a qual denotamos por β_0. Assim $\beta_0 \leq x - \alpha_0$ para todo $x \in A$ de onde segue que

$$\beta_0 + \alpha_0 \leq x, \quad \forall x \in A. \tag{3.2}$$

Por outro lado, Seja α uma cota inferior de A, então $\alpha \leq x$ e portanto $\alpha - \alpha_0 \leq x - \alpha_0$, isto é $\alpha - \alpha_0$ é uma cota inferior de B e portanto $\alpha - \alpha_0 \leq \beta_0$ de onde segue que

$$\alpha \leq \beta_0 + \alpha_0, \quad \forall \alpha \text{ cota inferior de } A. \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3) temos que A possui ínfimo de A. Logo qualquer que seja o caso A possui ínfimo. Fica como exercício pro leitor que todo conjunto limitado superiormente possui supremo.

$\mathbb{R}$ **é arquimediano**, isto é, Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$. De fato, suponhamos que $n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\mathbb{N}$ é um conjunto limitado e portanto possui supremo. Seja $\beta_0 = \sup \mathbb{N}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_0 - 1 < n_0$ e dai temos que $\beta_0 < n_0 + 1$ o qual contradiz o fato de β_0 ser uma cota superior de $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}$ **é denso em** $\mathbb{R}$, isto é, se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$. De fato, por $\mathbb{R}$ ser arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{b-a} < n$ e portanto $an + 1 < bn$. Por outro lado, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m - 1 \leq an < m$ (veja exerçicio 7), portanto $an < m \leq an + 1 < bn$ de onde segue que $a < \dfrac{m}{n} < b$.

Vimos que no corpo $\mathbb{Q}$ no existe solução da equação $x^2 = 2$. Esta é uma deficiência que $\mathbb{R}$ não tem:

Theorem 2.3.1 *Seja $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, existe uma única solução real positiva da equação $x^2 = b$. Esta solução será denotada por $\sqrt{b}$.*

Proof: **Unicidade:** Suponha duas soluções positivas x_1 e x_2 de $x^2 = b$ então $x_1^2 - x_2^2 = 0$, isto é, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$, como $x_1 + x_2 > 0$ necesariamente $x_1 - x_2 = 0$, logo $x_1 = x_2$.

Existência: Sejam os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 > b\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < b\}$$

consideremos $\alpha_0 = \inf A \in \mathbb{R}$ e mostremos $\alpha_0^2 = b$. Usemos o argumento do absurdo, isto é suponhamos $\alpha_0^2 \neq b$. Então ou $\alpha_0 \in A$ ou $\alpha_0 \in B$. Se $\alpha_0 \in A$ pode-se mostrar que para n suficientemente grande $\alpha_0 - 1/n \in A$ o que contradiz o fato de α_0 ser o ínfimo de A, por outro lado se $\alpha_0 \in B$ é possível mostrar que $\alpha_0 + 1/n \in B$ o que contadiz o fato de α_0 ser a maior das cotas inferiores de A. Portanto $\alpha_0^2 = b$. □

Dado $b \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, de forma similar pode-se provar que existe uma única solução real positiva da equação $x^m = b$ e esta solução será denotada por $\sqrt[m]{b}$ ou por $b^{1/m}$.

Observação: Observe que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pois nao existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$, portanto $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é chamado de *conjunto dos números irracionais.*

2.4 Valor Absoluto e Desigualdades

Seja $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{se} \quad a < 0. \end{cases}$$

Desta definição verifica-se que rapidamente que

1. $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$ e $|a| \geq -a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
2. $|0| = 0$ e que $|a| > 0$ se e somente se $a \neq 0$.
3. $|-a| = |a|$ e $|a|^2 = a^2$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Theorem 2.4.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ temos que*

1. *(i) $|ab| = |a||b|$, (ii) $|a + b| \leq |a| + |b|$, (iii) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.*
2. *Se $b \geq 0$, temos que $|a| \leq b$, se e somente se, $a \leq b$ e $-a \leq b$.*

Proof: **Prova da desigualdade triangular para $|\cdot|$:**

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

Observe que, como consequência da segunda propriedade, tem-se $|-a| = |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Também, usando a desigualdade triangular pode-se mostrar que

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

De fato, $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ dai segue que $|a| - |b| \leq |a - b|$. Dado que a e b são arbitrários tem-se também que $|b| - |a| \leq |b - a|$, isto é $-(|a| - |b|) \leq |a - b|$, dai segue que $||a| - |b|| \leq |a - b|$

□

Em $\mathbb{R}$ temos podemos definir uma noção de distância entre seus elementos da forma

$$d(a, b) := |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Esta função tem as seguintes propriedades

1. $d(a,b) \geq 0$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $d(a,b) = 0$ se e somente se $a = b$
2. $d(a,b) = d(b,a)$.
3. $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

A reta (desenho)

Theorem 2.4.2 *Seja b um real qualquer. Então $\sqrt{b^2} = |b|$.*

Proof: Se $b = 0$ a identidade se verifica. Se $b > 0$ temos que $|b|^2 = b \cdot b = b^2$, logo $|b|$ é solução de $x^2 = b^2$, Se $b < 0$ temos que $|b|^2 = (-b)(-b) = b^2$, e portanto $|b|$ é solução de $x^2 = b^2$. Dai, sempre teremos que o número positivo $|b|$ é solução de $x^2 = b^2$. Como a solução é única segue que $\sqrt{b^2} = |b|$. □

Theorem 2.4.3 *Seja $a \in \mathbb{R}$. Se $|a| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, então $a = 0$.*

Proof: Se $a \neq 0$ então para $\epsilon = |a|/2$ temos que $|a| < |a|/2$ de onde concluímos que $2 < 1$ ($\Rightarrow\Leftarrow$), logo necessariamente $a = 0$. □

2.5 Intervalos

Definição: Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito um intervalo se tem a seguinte propriedade: Se $a, b \in A$ tal que $a < b$, então se $c \in \mathbb{R}$ e tal que $a < c < b$ tem-se que $c \in A$.
Exemplo: O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ é um intervalo. De fato, sejam $a, b \in A$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$. Se $c = 0$, temos que $c \in A$, se $c > 0$ então $b > 0$ e portanto multiplicando $c < b$ por c e depois por b temos que $c^2 < cb < b^2 < 2$, logo $c \in A$. Por último se $c < 0$ teremos que $a < 0$ dai multiplicando $a < c$ por a e depois por c temos que $a^2 > ac > c^2$, dai temos que $c^2 < 2$, logo $c \in A$.
Notações para intervalos: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ temos os intervalos limitados

$$\begin{aligned}
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \text{ “intervalo aberto de extremos } a \text{ e } b\text{”},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \text{ “intervalo fechado de extremos } a \text{ e } b\text{”},\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \text{ “intervalo semiaberto, aberto em } a\text{”},\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \text{ “intervalo semiaberto, aberto em } b\text{”}.
\end{aligned}$$

e os intervalos abertos e semiabertos não limitados

$$]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \quad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$
$$[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \quad]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

2.6 Exercícios

Seção ??

1. Seja K um corpo.
   (a) Mostre que os elementos neutros aditivo e multiplicativo são únicos.
   (b) Mostre que os elementos inversos aditivo e multiplicativo de cada elemento de K são únicos.
   (c) Mostre que $(-1)a = -a$ e $-(-a) = a$ para todo $a \in K$.

2. Seja K um corpo, mostre os seguintes itens
   (a) Se $a, b \neq 0$, então $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.
   (b) se $b_1, b_2 \neq 0$, então $\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$.

3. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se n^2 é par, então n é par.

4. Seja K um corpo ordenado. Mostre que
   (a) $1 > 0$.
   (b) Se $a > 0$ e $a \cdot b > 0$ então $b > 0$.
   (c) Se $ab < 0$ então $a > 0$ e $b < 0$, ou $a < 0$ e $b > 0$.
   (d) Se $a > b > 0$ então $a^{-1} < b^{-1}$.

5. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais
   (a) Mostre que, se $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $ri \notin \mathbb{Q}$.
   (b) Mostre que, se $a < b$, então existe $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.
   (c) Mostre que se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$.
   (d) se $0 < a < b$, mostre que $a^2 < b^2$ e $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
   (e) se $a, b > 0$, mostre que $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$. Dica: desenvolva $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

6. Denotemos com $\mathbb{R}^+$ ao conjunto dos números positivos do corpo dos numeros reais $\mathbb{R}$.
   (a) Mostre que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$ (Dica: usar indução).
   (b) Mostre que, se consideramos o conjunto $\mathbb{Q}^+ = \{n/m : n, m \in \mathbb{N}\}$, então $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}^+$.
   (c) Mostre que $\mathbb{R}^+$ é único, isto é, não existe outro conjunto de numeros positivos distinto de $\mathbb{R}^+$ no corpo $\mathbb{R}$.

7. Seja $a \in \mathbb{R}$.
   (a) se $a > 0$, mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq a < n$.
   (b) para a qualquer, mostre que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n - 1 \leq a < n$

8. Seja A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e denotemos com $-A = \{-x : x \in A\}$. Mostre que
$$\sup(-A) = -\inf A$$

9. Seja A um subconjunto limitado inferiormente de $\mathbb{R}$. Mostre que α_0 é o ínfimo de A, se e somente se, satisfaz os seguintes itens

(a) $\alpha_0 \leq a$ para todo $a \in A$.

(b) para cada $\epsilon > 0$ existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 < \alpha_0 + \epsilon$.

10. Enuncie e mostre um resultado similar ao item anterior para o supremo de um conjunto.

11. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $c > 0$. Consideremos os conjuntos $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ e $cA = \{ca : a \in A\}$. Se A e B são limitados superiormente, mostre que $A + B$ e cA são limitados superiormente e que
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \qquad \sup(cA) = c \sup(A).$$

12. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e consideremos o conjunto $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$. Suponha que A e B são subconjuntos limitados, mostre que

    (a) Se $A, B \subset \mathbb{R}^+$ então $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$.

    (b) Se $A, B \subset \mathbb{R}^-$ então $\sup(AB) = \inf(A)\inf(B)$.

    (c) Se $A \subset \mathbb{R}^+$ e Se $B \subset \mathbb{R}^-$ então $\inf(AB) = \sup(A)\inf(B)$.

    Em cada um dos itens anteriores verifique que a igualdade não se verifica quando retiramos a hipótese.

13. Seja A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Considere o conjunto $B = \{1 - 2x : x \in A\}$ e mostre que
$$\inf(B) = 1 - 2\sup(A)$$

14. **Primeira prova, ate aqui!**

15. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Mostre que $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

16. Sejam $a, b, x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$. Mostre que $|x| < |a| + |b|$.

17. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que A é limitado, se e somente se, existe $M \geq 0$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in A$.

18. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $|a + b| = |a| + |b|$ se e somente se $ab \geq 0$.

19. Mostre que $|x - a| \leq \epsilon$ se e somente se $a - \epsilon < x < a + \epsilon$.

20. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ e $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

21. Encontre e desenhe sobre a reta numérica os conjuntos cujos elementos x satisfazem

    (a) $|x + 1| < |x - 1|$.

    (b) $|x| + |x - 1| < 2$.

22. Mostre que os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$ são intervalos
$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \text{ e } (x - 1)^{2016} < 2\}.$$

23. Considere os conjuntos
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - x^3 < 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - x^3 > -1/32\}.$$

    (a) Mostre que $A \cap \mathbb{R}^+$ é um intervalo.

    (b) Mostre que A é um intervalo.

    (c) B é um intervalo?.

Capítulo 3

Sequências numéricas

Uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é chamada de *sequência em* $\mathbb{R}$. Denotando por $x_n = x(n) \in \mathbb{R}$ a seqüencia poderá ser escrita da seguinte forma

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

O termo x_n é chamado de termo genérico da sequência. Em alguns casos denotaremos a sequência sem o indexador, (x_n), significando implicitamente que o índice n pertence a $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}_0^+ = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq 0\}$.
Exemplo: Considerando $x, y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por $x(n) = 1/n$ e $y(n) = 3^n$ temos que

$$x = (x_n) = (1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, \ldots), \qquad y = (y_n) = (3^n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 3^2, 3^3, \ldots).$$

Definição: Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de uma seqüencia (x_n) quando n tende para o infinito, e denotamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Caso exista o limite $L \in \mathbb{R}$ dizemos que a seqüencia é convergente caso contrário é divergente. Nos casos de convergência para o limite L usaremos com frequência a notação

$$x_n \to L, \text{ quando } n \to \infty.$$

Observações:

1. A definição anterior continua válida se verificamos somente que vale para $\epsilon > 0$ pequeno.

2. Na definição anterior observe que $|x_n - L| < \epsilon$ significa que $L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$.

3. Dizemos que uma afirmação é válida para n suficientemente grande se vale para todo n a partir de algum n_0, isto é, se vale para $n \geq n_0$. Logo na definição anterior temos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ se $|x_n - L|$ é pequeno ($< \epsilon$) para n suficientemente grande.

4. O limite de uma sequência depende do comportamento dos seus termos para n suficientemente grande, não interessando o comportamento dos primeiros termos, assim ainda podemos estender o conceito de sequência usando outros indexadores enumeráveis, como por exemplo $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, isto é, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ é uma sequência.

Exemplo: A sequência $(1/n)$ tem limite $L = 0$ quando $n \to \infty$. De fato, fixando $\epsilon > 0$ iremos ter que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |n| > \frac{1}{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim, considerando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ (pois $\mathbb{N}$ é arquimediano), temos que para $n \geq n_0$, segue que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |n| > \frac{1}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon,$$

logo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Exemplo: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ vejamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. De fato, fixando $\epsilon > 0$ iremos ter que

$$|\alpha^n - 0| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^n < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n\ln(\alpha) < \ln(\epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(\epsilon)}{ln(\alpha)}.$$

Asimm, considerando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{\ln(\epsilon)}{ln(\alpha)}$, temos que para $n \geq n_0$ segue que $n > \ln(\epsilon)/\ln(\alpha)$e fazendo o caminho inverso nas desigualdades anteriores temos que $|\alpha^n - 0| < \epsilon$.

Exemplo: Consideremos $x_n = 1 - \frac{1}{n(n+1)}$, vejamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. De fato, fixando $\epsilon > 0$ iremos ter que

$$|x_n - 1| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n(n+1)} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n(n+1) > \frac{1}{\epsilon}. \tag{0.1}$$

Neste ponto, poderíamos continuar da seguinte forma inconveniente

$$\Rightarrow \quad 2n^2 \geq n(n+1) > \frac{1}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad 2n^2 > \frac{1}{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}.$$

Note que, neste ponto fixando $n_0 \in \mathbb{N}$ e tomando $n \geq n_0$ não teríamos como percorrer o caminho inverso e portanto inútil. Por outro lado sabemos que $n(n+1) > n$ logo, se

$$n > \frac{1}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad n(n+1) > \frac{1}{\epsilon}, \tag{0.2}$$

assim escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\epsilon$, temos que para $n \geq n_0$ segue que de (0.2) e (0.1) que $|x_n - L| < \epsilon$.

Theorem 3.0.1 *Seja (x_n) uma sequência e $L \in \mathbb{R}$. Logo,*

1. *$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, se e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - L| = 0$.*
2. *Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, então $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |L|$. O recíproco somente vale quando $L = 0$.*

Proof: O primeiro item sai imediatamente da identidade

$$|x_n - L| = \big||x_n - L| - 0\big|,$$

portanto deixamos os detalhes da prova pro leitor. O segundo item é consequência da desigualdade

$$\big||x_n| - L\big| \leq |x_n - L|.$$

Quando $L = 0$, o recíproco do item 2 é consequencia do item 1. Agora se $L \neq 0$ o recíproco do item 2 nao é verdade, pois por exemplo consideremos a sequência $x_n = (-1)^n$ e $L = 1$, então temos que $|x_n| \to |L|$, porêm $x_n \not\to L$, pois para $\epsilon = 1/2 > 0$ é impossível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - 1| < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

□

Theorem 3.0.2 (Unicidade do limite) *O limite de uma sequência é único.*

Proof: Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = L_1$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = L_2$. Então, para $\epsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - L_1| < \epsilon/2 \quad \forall n \geq n_1, \quad \text{e} \quad |x_n - L_2| < \epsilon/2 \quad \forall n \geq n_2$$

Portanto para $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos que

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| < \epsilon.$$

Por ϵ ser arbitrário temos que $L_1 = L_2$. □

Uma sequência (x_n) é dita limitada se o conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado. Analogamente, dizemos que a seqüencia é limitada superiormente ou inferiormente se A for limitada superiormente ou inferiormente respectivamente.

Observação a sequência (x_n) é limitada se é somente se existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem 3.0.3 *Toda seqüencia convergente é limitada.*

Proof: Seja $L = \lim_{n\to\infty} x_n$, logo para $\epsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
&|x_n - L| < \epsilon = 1, \quad \forall n \geq n_0 \\
&\Rightarrow |x_n| - |L| < 1, \quad \forall n \geq n_0 \\
&\Rightarrow |x_n| < 1 + |L|, \quad \forall n \geq n_0
\end{aligned}$$

Seja $M := \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |L|\}$, então $|x_n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, logo (x_n) é limitada. □

Exemplo: Seja $x_0 \neq 0$ e $\alpha > 1$ consideremos a sequência definida de forma recursiva $x_{n+1} = \alpha x_n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Esta sequência não é limitada portanto não pode ser convergente. De fato, pode se mostrar por indução que $x_n = \alpha^n x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, se fosse limitada teriamos que existe $C > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq C \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^n |x_0| \leq C \quad \Leftrightarrow \quad n \ln(\alpha) \leq \ln(C|x_0|^{-1}) \quad \Leftrightarrow \quad n \leq \ln(C|x_0|^{-1}) / \ln(\alpha),$$

o qual é absurdo, pois $\mathbb{N}$ não é limitado.

Theorem 3.0.4 (Confronto) *Suponhamos que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \geq n_0$ e que as sequências (x_n) e (z_n) convergem para o mesmo limite $L \in \mathbb{R}$, então, (y_n) é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = L.$$

Proof: Dado $\epsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$L - \epsilon < x_n \quad \forall n \geq n_1 \quad \text{e} \quad z_n < L + \epsilon \quad \forall n \geq n_2$$

Portanto, para $n \geq \hat{n} = \max\{n_1, n_2, n_0\}$ temos que

$$L - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \epsilon$$

portanto $\lim_{n\to\infty} y_n = L$. □

Exemplo: Seja $p > 1$, a sequência $y_n = 1/(n^p + 1)$ é convergente. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$n^p + 1 > n^p \geq n \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{n^p + 1} \leq \frac{1}{n},$$

isto é $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $x_n = 0$ e $z_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \to 0$ e $z_n \to 0$, pelo teorema do confronto $y_n \to 0$.

Theorem 3.0.5 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = M$. Então a sequência $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge e*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha L + \beta M.$$

Proof: Seja $\epsilon > 0$ fixemos $C > 0$ uma constante maior que $|\alpha|$ e $|\beta|$. Por hipótese, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} |x_n - L| &< \epsilon/2C \quad \text{para todo} \quad n \geq n_1, \\ |y_n - M| &< \epsilon/2C \quad \text{para todo} \quad n \geq n_2. \end{aligned}$$

Asim, para $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ temos que

$$\begin{aligned} |\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha L + \beta M)| &\leq |\alpha||x_n - L| + |\beta||y_n - M| \\ &\leq C(|x_n - L| + |y_n - M|) < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Exemplo: se consideramos a sequência $z_n = \frac{2}{n} - 5 \cdot 2^{-n}$, temos que

$$z_n = 2 \cdot \frac{1}{n} + (-5)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como $\frac{1}{n} \to 0$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, segundo o teorema anterior temos que

$$z_n \to 2 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 = 0.$$

Theorem 3.0.6 *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia limitada e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, então*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

Proof: *Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia limitada existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$. Dai segue que*

$$0 \leq |x_n y_n| \leq M|y_n|$$

pelo teorema do confronto $\lim_{n\to\infty} |x_n y_n| = 0$, portanto $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. □

Exemplo: Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $x_n = \sin(e^n)/n$. Então, como $(\sin(e^n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero, tem-se que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Theorem 3.0.7 *Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = M$. Então*

1. *$(x_n y_n)$ converge e $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = LM$.*
2. *Se $M \neq 0$ então (x_n/y_n) converge e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{L}{M}$.*

Proof: **(Item 1):** Observe que

$$0 \leq |x_n y_n - LM| \leq |x_n||y_n - M| + |M||x_n - L|.$$

Como $(|x_n|)$ é convergente, então é limitada e como $|y_n - M| \to 0$ temos que $|x_n||y_n - M| \to 0$. Analogamente $|M||x_n - L| \to 0$, agora, aplicando o teorema do confronto segue $|x_n y_n - LM| \to 0$ e portanto $x_n y_n \to LM$.

(Item 2): Basta Provar que $\lim_{n\to\infty} (1/y_n) = 1/M$ e usar o item anterior. Observe que

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - y_n|}{|M||y_n|}. \tag{0.3}$$

Desde que $\lim_{n\to\infty} |y_n| = |M| > 0$ então para $\epsilon = |M|/2 > 0$, exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|M| - \epsilon < |y_n|$, para $n \geq n_0$, isto é, $\dfrac{|M|}{2} < |y_n|$ para $n \geq n_0$, assim $\dfrac{1}{|y_n|} < \dfrac{2}{|M|}$ para $n \geq n_0$. Logo, usando esta desigualdade em (0.3) temos que

$$0 \leq \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{M}\right| < \frac{2|M - y_n|}{|M|^2}, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Aplicando novamente o Teorema do Confronto segue o resultado desejado. □

Exemplo: Prove que o limite da sequencia $x_n = \frac{(2n-3)(n+5)}{4n^2+6}$, quando $n \to \infty$ é $1/2$. De fato, multiplicando numerador e denominador de x_n por $1/n^2$, temos que

$$x_n = \frac{(2 - 3/n)(1 + 5/n)}{4 + 6/n^2}.$$

Dos teoremas (3.0.5) e (3.0.7) existem os limites dos somandos, dos produtos e do cociente e como limite do denominador é diferente de zero, então temos que a sequencia (x_n) converge e

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}[(2-3/n)(1+5/n)]}{\lim\limits_{n\to\infty}(4+6/n^2)} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-3/n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1+5/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4+6/n^2)} = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Theorem 3.0.8 *Seja $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, podemos afirmar que*

1. *se $x_n \geq 0$ para todo $n \geq n_0$, então $L \geq 0$.*
2. *se $L > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.*

Proof: **(Item 1)**: Suponhamos que $L < 0$, então para $\epsilon = -L/2 > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < L + (-L/2) = L/2$ para todo $n \geq n_1$, ísto é $x_n < 0$ para todo $n \geq n_1$, em particular, para $n > \max\{n_0, n_1\}$ temos que $x_n < 0$ e por hipótese $x_n \geq 0$ o qual é contraditório, logo $L \geq 0$.
(Item 2): Pela definição do limite, para $\epsilon = L > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 = L - \epsilon < x_n$ para todo $n \geq n_0$. $\square$

Corollary 3.0.9 *Sejam $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = M$, podemos afirmar que*

1. *Se $x_n \leq 0$ para todo $n \geq n_0$, então $L \leq 0$.*
2. *Se $L < 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.*
3. *Se $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq n_0$, então $L \leq M$.*
4. *Se $L < M$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y_n$ para todo $n \geq n_0$.*

Proof: Mostraremos os itens 1 e 3. Os restantes são deixados para o leitor.
Item 1: Considere $\hat{x}_n = -x_n$ e $\hat{L} = -L$, então temos que $\hat{x}_n \to \hat{L}$ e $\hat{x}_n \geq 0$ para todo $n \geq n_0$, assim pelo teorema anterior $\hat{L} \geq 0$, isto é $L < 0$.
Item 3: Consideremos $z_n = x_n - y_n$, $K = L - M$ Neste caso temos que $z_n \to K$. Como $z_n \leq 0$ para todo $n \geq n_0$, pelo Item 1 temos que $K \leq 0$, isto é $L \leq M$. $\square$

Exemplo: Se uma sequência (x_n) que converge para L satisfaz $x_n > 0$ para $n \geq n_0$, não implica que $L > 0$. De fato, basta considerar a sequência $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Subsequências

Definição: Uma subsequência da sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição da função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito A de $\mathbb{N}$ sendo que A é distribuído de forma crescente, isto é, $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ com $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \cdots$. Assim podemos denotar a subsequência da seguinte forma $x|_A = (x_m)_{m\in A} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, portanto uma subsequência é uma sequência. Da mesma forma que nas sequências, as subsequências de (x_n) serão denotadas simplesmente por (x_{n_k}) deixando implícito que os $k \in \mathbb{N}$ e que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$.

Exemplo: Algumas subsequências de $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots)$ são dadas por

$$(x_2, x_4, x_7, x_9, \ldots), \quad (x_5, x_{13}, x_{14}, x_{17}, \ldots).$$

Em particular, algumas subsequências de $x = (1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, \ldots)$, são dadas por

$$(2, 3, 2, 3, 2, 3, \ldots), \quad (4, 4, 4, 4, \ldots), \quad (4, 2, 4, 2, 4, \ldots)$$

Exemplo: Uma subsequência de $(x_n) = (1/n)$ é a sequência $(y_k) = (1/[k(k+1)])_{k\in\mathbb{N}}$, pois $y_k = x_{n_k} = \frac{1}{n_k}$ onde $n_k = k(k+1)$.

Theorem 3.0.10 *Se (x_n) converge para L, então toda subsequência desta também converge para L.*

Proof: Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Agora consideremos uma subsequencia (x_{n_k}) de (x_n). Como $n_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, temos que $n_{k_0} \geq n_0$ para algun $k_0 \in \mathbb{N}$, e como (n_k) é crescente segue que $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$ para todo $k \geq k_0$, logo

$$|x_{n_k} - L| < \epsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

portanto $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$. □

Exemplo: segundo o teorema anterior a sequência $x_n = (-1)^n$ não pode convergir pois as subsequências $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergem a limites distintos.

Theorem 3.0.11 *Sejam A e B subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Suponha que (x_n) é uma sequência tal que as subsequencias $(x_n)_{n\in A}$ e $(x_n)_{n\in B}$ convergem para o mesmo limite $L \in \mathbb{R}$. Então, se $A \cup B = \mathbb{N}$ temos que a sequência (x_n) converge para L.*

Proof: Seja $\epsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in A}$ e $(x_n)_{n\in B}$ convergem para o mesmo limite $L \in \mathbb{R}$, temos que existem $n_1 \in A$ e $n_2 \in B$ tal que

$$\begin{aligned} |x_n - L| < \epsilon \qquad & \forall n \in A \text{ com } n \geq n_1, \\ |x_n - L| < \epsilon \qquad & \forall n \in B \text{ com } n \geq n_2, \end{aligned}$$

Assim, se tomamos $n_0 = \max n_1, n_2$ temos que para $n \geq n_0$ com $n \in \mathbb{N} = A \cup B$, n pertencerá a A ou B, logo $|x_n - L| < \epsilon$. Portanto (x_n) converge para L. □

3.1 Sequências monótonas

Definição: Dizemos que uma sequência (x_n) é:

1. crescente, se para qualquer $n < m$ tem-se $x_n \leq x_m$.

2. estritamente crescente, se para qualquer $n < m$ tem-se $x_n < x_m$.

3. decrescente, se para qualquer $n < m$ tem-se $x_n \geq x_m$.

4. estritamente decrescente, se para qualquer $n < m$ tem-se $x_n > x_m$.

5. monótona, se for crescente ou decrescente.

Theorem 3.1.1 *Toda sequencia (x_n) crescente e limitada superiormente é convergente. Alem disso*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Proof: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente e limitada superiormente. Consideremos $L = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, então dado $\epsilon > 0$ temos que $L - \epsilon < x_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, logo, para todo $n \geq n_0$ temos que $x_{n_0} \leq x_n \leq L$. Consequentemente $L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. □

Corollary 3.1.2 *Toda sequencia (x_n) decrescente e limitada inferiormente é convergente. Alem disso*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo: Seja $0 < \alpha < 1$. consideremos a sequência (x_n) dado por fixamos $x_1 > 0$ e definimos recursivamente $x_n = \alpha x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Verifica-se por indução que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Prove!). Como $x_{n+1} = \alpha x_n \leq x_n$ esta sequência é decrescente e com é limitada inferiormente converge para algum $L \in \mathbb{R}$. Tomando limite em $x_n = \alpha x_{n-1}$ quando $n \to \infty$ temos que $L = \alpha L$, isto é, $L(1-\alpha) = 0$ dai segue que $L = 0$.

Exemplo: a sequência (s_n) dada por $s_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ é evidentemente crescente e prova-se por indução que $s_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$ para todo $n \geq 1$, logo $s_n \leq 1$ e portanto é limitada superiormente. Pelo teorema das sequências monótonas é convergente. Calculemos seu limite. Observe que

$$2s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

isto é $2s_n = 1 + s_n - \frac{1}{2^n}$ de onde seque que $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$,. Dai temos que $s_n \to 1$.

Theorem 3.1.3 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente*

Proof: Consideremos o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_p \quad \forall p > n\}$. Se o conjunto D for infinito $D = \{n_1, n_2, \cdots\}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, então a subsequencia $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente a qual, por ser limitada superiormente é convergente. Agora se o conjunto D for finito (inclusive o vazio), então para $n_1 = \max(D) + 1 \in \mathbb{N}$ temos que $n_1 \notin D$ e portanto exite $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 < n_2$ e $x_{n_1} > x_{n_2}$, novamente $n_2 \notin D$ portanto exite $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 < n_3$ e $x_{n_2} > x_{n_3}$, continuando este processo conseguimos construir uma subsequencia $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ decrescente, a qual por ser limitada inferiormente, é convergente. □

3.2 Sequências de Cauchy

Definição: Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy se para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Theorem 3.2.1 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Proof: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, logo para $\epsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$, $\forall n, m \geq n_0$ em particular $|x_n - x_{n_0}| < 1$, $\forall n \geq n_0$. Como

$$|x_n| - |x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x_n| < 1 + |x_{n_0}|, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tomando $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x_{n_0}|\}$ termos que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Theorem 3.2.2 *Uma sequência é convergente se e somente é de Cauchy.*

Proof: ($\Rightarrow$): Seja (x_n) tal que $x_n \to L \in \mathbb{R}$, logo para $\epsilon > 0$ fixo temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \epsilon/2$, $\forall n \geq n_0$. Assim, para $n, m \geq n_0$ temos que

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - L| + |L - x_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

logo a sequência é de Cauchy.

($\Leftarrow$): Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, logo para $\epsilon > 0$ fixo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon/2$, $\forall n, m \geq N$. Pelo teorema anterior esta sequência é limitada e podemos concluir, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, que esta sequência possui uma subsequência convergente. Denotando com $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ a esta subsequência cujo limite é L, temos que existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_k} - L| < \epsilon/2$, $\forall n_k \geq n_{k_0}$. Denotando com $N_0 = \max\{N, n_{k_0}\}$ e fixando $n_k \geq N_0$, temos que para $n \geq N_0$,

$$|x_n - L| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

mostrando assim que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. $\square$

Exemplo: Consideremos a sequência definida por

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-1}),\ n > 2.$$

Prova-se por indução que

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Assim, se $m > n$ temos que

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} \end{aligned}$$

de onde temos que

$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2^{n-2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n}} \right) \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

Logo se ficamos $\epsilon > 0$, como $\frac{1}{2^{n-2}} \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n-2}} < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, assim

$$|x_n - x_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Logo (x_n) é de Cauchy e portanto converge.

3.3 Limites infinitos

Definição: Dizemos que uma sequência (x_n) tem limite "infinito" quando $n \to \infty$, e denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, se para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n > M, \quad \forall n \geq n_0.$$

Analogamente, dizemos que uma sequência (x_n) tem limite "menos infinito" quando $n \to \infty$, e denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, se para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n < -M, \quad \forall n \geq n_0.$$

Exemplo: Vejamos que sequência dada por $x_n = \sqrt{n}$ tem limite ∞ quando $n \to \infty$. De fato, seja $M > 0$, então

$$\sqrt{n} > M \quad \Leftrightarrow \quad n > M^2$$

Fixando $n_0 > M^2$ teremos que para $n \geq n_0$ tem-se $\sqrt{n} > M$, portanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Observação:

1. Como $\pm\infty$ não são números reais as sequências cujos limites são $\pm\infty$ não são convergêntes.

2. Várias das propriedades aritméticas de limites de sequências convergentes não podem ser extendidas aos limites infinitos. Por exemplo a propriedade

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{3.4}$$

   não sempre é verdadeira, para ilustrar isto, basta tomar $x_n = n$ e $y_n = -n$, o que (3.4) implicaria que $0 = \infty - \infty$. Por otro lado, se considerarmos as $x_n = n^2 + n$ e $y_n = -n$, (3.4) implicaria que $\infty = \infty - \infty$ dai chegamos ao absurdo $0 = \infty$. Embora algumas propiedades aritmeticas sobre limites finitos não se preservem para limites infinitos ainda podemos ter, sob certas condições apropriadas, alguns resultados. Enunciaremos aqui alguns destes resultados:

Theorem 3.3.1 *Sejam (x_n) e (y_n) sequências, c uma constante positiva e $n_0 \in \mathbb{N}$.*

1. *Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$.*

2. *Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ e $y_n \geq c > 0$ para $n \geq n_0$, então $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n y_n] = \infty$.*

3. *Se $x_n \geq c$ e $y_n > 0$ para $n \geq n_0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n/y_n] = \infty$.*

Proof: Provaremos o segundo Item, os restantes fica como exercício para o leitor. Seja $M > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M/c$ para $n \geq n_1$. Consideremos $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, logo para $n \geq n_2$ teremos que $x_n y_n > M$, portanto $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n y_n] = \infty$. □

3.4 Limite Superior

Definição: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada superiormente. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite superior da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e denotamos

$$L = \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

se satisfaz os seguintes itens

1. Existe uma subsequência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo limite é L.

2. Se M for o limite de alguma subsequência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $M \leq L$.

Exemplo: Consideremos a sequência (x_n) dada por $x_n = \sin(n\pi/4)$, consideremos a subsequência (x_{n_k}) onde $n_k = 2(2k+1))$, logo $x_{n_k} = \sin((2k+1)\pi/2)$, temos que $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Seja M o limite de alguma subsequência (x_{m_k}) de (x_n). Como $x_{m_k} \leq 1$ segue que $M \leq 1$, portanto $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$.

Theorem 3.4.1 *Se $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$ e (y_n) é uma sequência limitada superiormente, então*

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

Proof: Seja $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $M = \limsup_{n\to\infty} y_n$. Se $L = 0$ então vale, portanto suponhamos que $L > 0$. Como $y_{n_k} \to M$ e $x_{n_k} \to L$ então $x_{n_k} y_{n_k} \to LM$. Se $x_{n_k} y_{n_k} \to C$ então

$$y_{n_k} = \frac{x_{n_k} y_{n_k}}{x_{n_k}} \to \frac{C}{L}$$

logo $\frac{C}{L} \leq M$, isto é $C \leq LM$ $\square$

Theorem 3.4.2 *Seja (a_n) uma sequência limitada superiormente em $\mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Então L é o limite superior desta sequência, se e somente se, L é o* **menor número real** *que satisfaz a propriedade:*

$$\text{para cada } \epsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n < L + \epsilon, \quad \forall n \geq n_0. \tag{4.5}$$

Proof: $(\Rightarrow)$: Suponhamos que L é o limite superior da sequência (a_n), vejamos primeiro que L satisfaz a propriedade (4.5). Procedamos pelo absurdo, suponhamos que existe $\epsilon_0 > 0$ e uma subsequencia (a_{n_k}) tal que

$$a_{n_k} \geq L + \epsilon_0 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Como esta sequência é limitada, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequencia convergente a um valor $M \in \mathbb{R}$ e que, em vista de (4.6), temos que $M \geq L + \epsilon_0$ o que entra en contradição com a definiçao de L. Portanto L satisfaz a propriedade (4.5). Vejamos agora que L é o menor valor que satisfaz esta propriedade. De fato, caso exista $M \in \mathbb{R}$ satisfazendo a propriedade (4.5) com $M < L$, então para $\epsilon = (L - M)/2$ temos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n \leq M + \epsilon = (L + M)/2 \quad \text{para todo} \quad n \geq n_1.$$

Como L é o limite de uma subsequência de (a_n) segue da desigualdade acima que $L \leq (L+M)/2$, isto é, $L \leq M$ o qual contradiz o fato de $M < L$. Portanto L é o menor número real que satisfaz (4.5).

($\Leftarrow$): seja $L \in \mathbb{R}$ é o menor valor que satisfaz a propriedade (4.5), mostremos que existe uma subsequência convergindo para L. Seja $\epsilon > 0$, por hipótese existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < L + \epsilon$ para todo $n > n_0$. Como $L - \epsilon < L$, temos que $L - \epsilon$ não satisfaz a propriedade (4.5). logo existem infinitos índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tal que $L - \epsilon < a_{n_k}$, logo $L - \epsilon < a_{n_k} < L + \epsilon$ e portanto $x_{n_k} \to L$. Agora seja M o limite de alguma subsequência, então em vista de (4.5) temos que $M \leq L + \epsilon$. Como ϵ é arbitrário tem se que $M \leq L$. Portanto L é o limite superior de (a_n). $\square$

3.5 Exercícios

1. Usando a definição de limite de uma sequência, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{n^2-1} = 1$$

2. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ se e somente se $|\alpha| < 1$.

   (b) Analise a convergência da sequência (α^n) quando $|\alpha| = 1$.

   (c) A sequência (α^n), com $|\alpha| > 1$, converge?

3. Seja $r \geq 0$ mostre, usando indução que,

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)r^2/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Seguidamente considere a sequência $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ e mostre usando a desigualdade anterior que $n = (1+x_n)^n \geq n(n-1)x_n^2/2$. Dividindo esta desigualdade por $n(n-1)$ conclua, pelo teorema do confronto que $x_n \to 0$ quando $n \to \infty$, ou equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia de termos positivos que converge para L. Mostre que $\sqrt{x_n}$ converge para $\sqrt{L}$.

5. Mostre que $2^n \leq (n+1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seguidamente, considere $x_n = 2^n/(n+2)!$ e mostre que $x_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Depois, prove que $2^n/n! = 4x_{n-2}$ para $n \geq 2$ e conclua que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

6. Use ideias similares ao item anterior para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

7. Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Mostre que:

   (a) Se $L < \beta$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < \beta$ para todo $n \geq n_0$.

   (b) Se $L > \alpha$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \alpha$ para todo $n \geq n_0$.

8. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de termos positivos.

   (a) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

   (b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

9. Seja $p \in \mathbb{N}$ e $\alpha > 1$. Use o item anterior para mostrar os seguintes limites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{\alpha^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n^n} = 0.$$

10. Seja p um numero natural par, considere a sequência $(x_n) = (\cos(n\pi/p))_{n\in\mathbb{N}}$.

    (a) (x_n) é limitada? possui alguma subsequência convergente?

    (b) Encontre 3 subsequências de (x_n) que convirjam a limites distintos.

11. Considere a sequência

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

    (a) Mostre que $1/2 \leq x_n \leq 1 - \frac{1}{2n}$ para todo $n \geq 1$.

    (b) Mostre que a sequência é monótona.

    (c) A sequência é convergente?

12. Seja $\alpha > 0$ e considere a sequência $x_n = \alpha^{1/n}$.

    (a) Mostre que a sequência é monótona e limitada e portanto convergente.

    (b) Verifique que $x_n = x_{2n}^2$ e usando esta relação calcule o limite da sequência.

13. Seja $\alpha \in]0,1[$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Fixe $x_0 \leq \beta/(1-\alpha)$ e considere a sequência cujos termos sao obtidos recursivamente pela fórmula

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta, \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

    (a) Mostre que $x_n \leq \beta/(1-\alpha)$ para todo $n \geq 0$.

    (b) Mostre que a sequência converge e calcule seu limite.

14. Seja $\alpha \geq 0$. Fixe $x_0 \geq \alpha/2$ e considere a sequência cujos termos sao obtidos recursivamente pela fórmula

$$x_{n+1} = \alpha - \frac{\alpha^2}{4x_n}, \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

    (a) Mostre que $x_n \geq \alpha/2$ para todo $n \geq 0$.

    (b) Mostre que a sequência converge e calcule seu limite.

15. Seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência limitada e $(y_n)_{n\in N}$ uma sequência tal que existe $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = L \in \mathbb{R}$. Mostre que $(y_n)_{n\in N}$ possui uma subsequencia convergente.

16. Dê um exemplo de uma sequência limitada que não seja de Cauchy. Justifique sua resposta.

17. Considere $x_n = \sqrt{n}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ porém a sequência não é de Cauchy.

18. Seja $r \in]0,1[$ e considere a sequencia $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$.

    (a) Mostre que $s_n = rs_n + 1 - r^{n+1}$

    (b) Mostre que $s_n \to 1/(1-r)$ quando $n \to \infty$.

    (c) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|x_{n+1} - x_n| \leq r^n$. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e portanto convergente.

19. Seja (x_n) uma sequência crescente e ilimitada. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

20. seja (x_n) uma sequência de termos positivos. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$$

21. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Dê exemplo de sequências satisfazendo $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$ tais que

    (a) $x_n y_n \to \alpha$.

    (b) $x_n y_n \to \infty$.

    (c) $x_n y_n \to -\infty$.

22. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Dê exemplo de sequências satisfazendo $x_n \to \infty$, $y_n \to -\infty$ tais que

    (a) $x_n + y_n \to \alpha$.

    (b) $x_n + y_n \to \infty$.

    (c) $x_n + y_n \to -\infty$

23. Sejam (x_n) e y_n duas sequências tais que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

    (a) Se $x_n \to \infty$, então $y_n \to \infty$

    (b) Se $y_n \to -\infty$, então $x_n \to -\infty$

24. Mostre que $2\sqrt{n} \leq n$ para todo $n \geq 4$. Seguidamente mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}(n - \sqrt{n}) = \infty$.

25. Sejam (x_n), (y_n) sequências limitadas superiormente. Mostre que

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

26. Seja (x_n) uma sequencia limitada inferiormente. De forma similar ao limite superior, defina limite inferior para esta sequência e neste caso enuncie um teorema similar ao teorema 3.4.2.

27. Sejam (x_n), (y_n) sequências limitadas inferiormente. Mostre que

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} x_n,$$

    onde $\liminf$ denota o limite inferior.

Capítulo 4

Séries numéricas

Nesta seção estudaremos somas infinitas da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := a_1 + a_2 + a_3 \cdots$$

a qual é chamada de série numérica. O coeficiente a_k é chamado de termo geral (ou genérico) da série. Ista série inicia cm o subíndice $k = 1$, porem todos os resultados que obtermos continuam valendo para séries que iniciam em qualquer inteiro $k = k_0$, isto é,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k := a_{k_0} + a_{k_0+1} + a_{k_0+2} + \cdots$$

Pretendemos agora estabelecer o valor resultante desta soma infinita. Antes vejamos um exemplo que ajude a subsidiar como encontraremos esse valor na qual veremos também que a forma de somar infinitos termos pode não ter as mesmas propriedades que a soma de um número finito de termos.

Exemplo: Consideremos a série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ e suponhamos que o valor desta soma infinita é s, isto é $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = s$. Se somamos agrupando seus termos temos que

$$s = \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \cdots \quad \Rightarrow \quad s = 0,$$

porem se agrupamos da seguinte forma teremos

$$s = 1 + \underbrace{-1+1}_{=0} + \underbrace{-1+1}_{=0} + \underbrace{-1+1}_{=0} + \cdots \quad \Rightarrow \quad s = 1.$$

Ainda, observamos tambem que

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - s \quad \Rightarrow \quad s = 1/2.$$

Afinal, $s = 0$ ou $s = 1$ ou $s = 1/2$?. Nosso erro radica em atribuir um valor à série sem antes definir o forma em que os termos da série serão somados. Afim de estabelecer este processo para cada série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, consideremos sua sequência de somas parciais $(s_n)_{\in\mathbb{N}}$ dada por

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Observe que se a sequência (s_n) convergir para algum valor $L \in \mathbb{R}$, teremos intuitivamente que

$$L = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

isto é, o valor da série deveria coincidir com o limite da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Isto nos permite atribuir um valor à série desde que $(s_n)_{\in\mathbb{N}}$ seja convergente.

Definição: Dizemos que a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente se a sequência das somas parciais (s_n), onde $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, é convergente. Neste caso, se $L = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$, o valor da série será definida por L. Esta definição coincide com o procedimento intuitivo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = L.$$

A série será dita divergente se a sequência de somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for divergente e portanto não podemos atribuir nenhum valor à série.

Exemplo: A série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ é divergente. pois se $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ temos que $s_{2n} = 0$ e $s_{2n+1} = 1$, assim temos duas subseqências de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convirgindo a valores diferentes, portanto esta sequência não converge, dai que a série é divergente.

Exemplo: Seja $r \in \mathbb{R}$ fixado. A série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ é convergente? Qual é o valor da série?

A soma parcial é $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$. Multiplicando por r temos

$$\begin{aligned}
& rs_n = r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} \\
\Rightarrow \quad & s_n - rs_n = 1 - r^{n+1} \\
\Rightarrow \quad & (1-r)s_n = 1 - r^{n+1} \\
\Rightarrow \quad & s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \quad (\text{se } r \neq 1)
\end{aligned}$$

Como $r \in \mathbb{R}$ temos que $|r| < 1$ ou $|r| \geq 1$

1. Se $|r| < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ logo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-r}$ e portanto
$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$
2. Se $|r| \geq 1$ então $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Porqué? Veja que acontece com $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ quando $|r| > 1,\ r = 1$ e $r = -1$.

A série anterior é chamada de "série geométrica".

Exemplo: A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ é chamada de série harmônica. Vejamos que está série é divergente.

De fato, denotemos com $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ e observe que

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_{2^2} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
s_{2^3} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos mostrar por indução que

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dai segue $s_{2^n} \to \infty$ portanto a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Outra Alternativa para determinar a divergência da série harmônica: Consideremos a função $f(x) = 1/x$. Por f ser decrescente em $[1, \infty[$ temos que

$$\begin{aligned}
&\int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \\
\Rightarrow \quad &\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
\Rightarrow \quad &\ln(n+1) \leq s_n
\end{aligned}$$

Tomando limite quando $n \to \infty$ temos que $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Exemplo: Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. A série $\sum_{k=0}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ é convergente?

$$\sum_{k=0}^{n}(b_k - b_{k+1}) = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}$$

Tomando limite temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_0 - L$$

séries com este formato são chamadas de "séries telescópicas".

Consideremos a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Observe que seu termo geral pode ser escrito da forma

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Asim as somas parciais desta série são dadas por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Dai segue que $s_n \to 1$. Portanto a serie é convergente e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Theorem 4.0.1 *seja $k_0 \in \mathbb{N}$. então a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e somente se a série $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ converge*

Prova:

$$\underbrace{a_1 + \cdots + a_{k_0+n}}_{s_{k_0+n}} = \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k_0-1}}_{:=A_0} + \underbrace{a_{k_0} + \cdots + a_{k_0+n}}_{t_n}$$

então temos que $s_{k_0+n} = A_0 + t_n$. Dai segue que ambas sequências simultaneamente convergem ou divergem.

Theorem 4.0.2 (Critério de Cauchy) *A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente se e somente se dado $\epsilon > 0$ é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{0.1}$$

Proof: Observe que

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}|$$

Portanto a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy se e somente se (0.1) é satisfeito, ísto é, dai segue o resultado desejado. $\square$

Exemplo: Suponhamos que (a_n) é uma sequência tal que $|a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \geq 0$. Vejamos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. De fato, observe que

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdot + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdot + |a_{n+p}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdot + \frac{1}{2^{n+p}}.$$

Denotemos com (s_n) a sequencia de somas parcial da série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, isto é,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

a qual é convergente e portanto de Cauchy. Assim fixado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_{n+p} - s_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, \; p \in \mathbb{N}.$$

Dai temos que

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdot + a_{n+p}| \leq |s_{n+p} - s_n| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, \; p \in \mathbb{N}.$$

Pelo critério de Cauchy, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

4.1 Propriedades

Theorem 4.1.1 *Se as séries* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *convergem então para* $\alpha \in \mathbb{R}$ *as séries* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k)$ *são convergentes. Alem disso,*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Theorem 4.1.2 *Se a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge então* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

prova: Seja $s_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, logo $s_n = s_{n-1} + a_n$ para $n \geq 2$ e portanto $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como a série é convergente existe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Dai segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

Exemplo: Vejamos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k}$ não converge. De fato, como $\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} \neq 0$ pelo teorema anterior a série não pode ser convergente.

Note que na série harmônica o termo geral converge para zero mas a série não converge, portanto o recíproco não é verdade.

Theorem 4.1.3 (Critério de Comparação) *Suponhamos que existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *e* $C > 0$ *tal que* $0 \leq a_k \leq C b_k$ *para todo* $k \geq k_0$. *logo temos que*

1. *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge* $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge*

2. *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge* $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverge*

Prova: Sem perda de generalidade assumamos que $a_k \leq C b_k$, $\forall k \geq 1$. Sejam $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ as respectivas somas parciais, então temos que $s_n \leq C t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como estamos trabalhando com séries de termos não negativos as sequências $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são crescentes. Assim:

1. Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge então $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, logo é limitada superiormente o qual implica que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada superiormente. Portanto $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente.

2. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é divergente então $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ser limitada superiormente, logo $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Dai segue que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$.

Exemplo: Consideremos a série $\sum \frac{1}{n!}$. Desde que

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdots n} \leq \frac{1}{\underbrace{2\cdots 2}_{n-1 \text{ termos}}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

e a série $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ ser convergente concluímos que $\sum \frac{1}{n!}$ converge.

Exemplo: Seja $0 < p < 1$ consideremos a série $\sum \frac{1}{n^p}$. Desde que

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

concluímos que a série $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge.

4.2 Convergência absoluta e condicional

Theorem 4.2.1 *Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma serie de números reais. Logo temos que, se a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge então uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.*

Proof: Assumamos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ é convergente. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$\begin{aligned} p_n &= \max\{a_n, 0\}, \\ q_n &= \max\{-a_n, 0\}. \end{aligned}$$

Assim $p_n \leq |a_n|$ e $q_n \leq |a_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ converge, do teorema de comparação 4.1.3 podemos concluir que as séries $\sum_{k=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{k=1}^{\infty} q_n$ são convergentes. Porém

$$a_n = p_n - q_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dai concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Outra alternativa para provar o teorema anterior: Usaremos o criterio de Cauchy. Seja $\epsilon > 0$. Como a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Já que $|a_n + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + \cdots + |a_{n+p}|$ temos que

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo critério de Cauchy a série converge.

Definição: Dizemos que uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ for convergente.

O teorema anterior afirma que toda série absolutamente convergente é convergente.

Exemplo: Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2(-1)^n}{n!}$. Como

$$\frac{|1+2(-1)^n|}{|n!|} \leq \frac{3}{n!},$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!}$ converge, logo pelo critério de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1+2(-1)^n|}{|n!|}$ converge, portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2(-1)^n}{n!}$ é absolutamente convergente.

Exemplo: O recíproco do teorema anterior não é válido. Para ilustrar este fato, consideremos a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ a qual converge (veja o próximo teorema), porém a série dos valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Theorem 4.2.2 (Leibniz) *Seja $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de termos não negativos tal que $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ então $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge*

Proof: Consideremos $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, logo temos que

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= \underbrace{a_0 - a_1}_{\geq 0} + \underbrace{a_2 - a_3}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \\ s_{2n} &= a_0 + \underbrace{(-a_1 + a_2)}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_3 + a_4)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-1} + a_{2n})}_{\leq 0} \end{aligned}$$

Assim temos que $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente e $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente, alem disso

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &\leq a_0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(Limitada superiormente)} \\ s_{2n} &\geq a_0 - a_1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(Limitada inferiormente)} \end{aligned}$$

Portanto ambas sequências são convergentes e desde que $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ ambas sequências tem o mesmo limite, isto é

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = L.$$

Dai segue que para $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_n - L| < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad n \quad \text{par ou ímpar com} \quad n \geq n_0$$

isto é, a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, portanto a série é convergente. $\square$

Exemplo: A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ converge? Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Como $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de termos positivos, pelo Teorema de Leibniz a série converge.

Definição: Dizemos que a série $\sum a_k$ é condicionalmente convergente se ela converge mas não é absolutamnte convergente.

Exemplo: A série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é condicionalmente convergente, enquanto a série $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$ é absolutamente convergente.

4.3 Testes de convergência

Theorem 4.3.1 (Teste da raiz) *Dada a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

consideremos $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *logo podemos afirmar:*

1. *Se* $L < 1$, *a série é absolutamente convergente.*
2. *Se* $L > 1$, *a série é divergente.*
3. *Se* $L = 1$, *nada se pode afirmar.*

Proof: Se $L < 1$ temos que para $L < r < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < r, \ \forall n \geq n_0$$
$$\Rightarrow |a_n| < r^n, \ \forall n \geq n_0$$

dai segue que

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \sum_{k=n_0}^{\infty} r^k$$

Como $|r| < 1$ a série geométrica é convergente temos que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ e convergente, portanto $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é absolutamente convergente.

Se $L > 1$ então para exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1, \ \forall n \geq n_0$$
$$\Rightarrow |a_n| > 1, \ \forall n \geq n_0,$$

dai segue que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ por tanto a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ não é convergente.

Finalmente observe que se consideramos as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

em ambos casos $L = 1$ porem uma converge e a outra diverge $\square$

Exemplo: A série $\sum \frac{e^n}{n^n}$ converge pois

$$L = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{|e^n|}{|n^n|}\right)^{1/n} == \limsup_{n\to\infty} \frac{e}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n} = 0 < 1,$$

Logo a série converge.

Theorem 4.3.2 (Teste da razão) *Dada a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

consideremos $L = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, *logo*

1. *Se* $L < 1$, *a série é absolutamente convergente*
2. *Se* $L > 1$, *a série é divergente*
3. *Se* $L = 1$, *nada podemos afirmar.*

Proof*:* *1. Assumamos que* $L < 1$. *Seja* $L < r < 1$ *então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r, \quad \forall n \geq n_0$$

isto é $|a_{n+1}| < r|a_n|$ $\forall n \geq n_0$. *assim* $|a_{n+2}| < r^2|a_n|$ $\forall n \geq n_0$ *e portanto*

$$|a_{n+p}| < r^p|a_n|, \quad \forall n \geq n_0$$

Dai temos que

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| = \sum_{p=0}^{\infty} |a_{n_0+p}| < |a_{n_0}| \sum_{p=0}^{\infty} r^p$$

Como a série geométrica converge então a série $\sum a_k$ *converge absolutamente.*
2. Para o caso $L > 1$ *deixamos como exercicio*
3. A série $\sum \frac{1}{n}$ *diverge e a série* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge. Em ambos casos tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

$\square$

Exemplo: A série $\sum \frac{b^n}{n!}$ converge pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b|^{n+1}/(n+1)!}{|b|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|b|}{n+1} = 0$$

Theorem 4.3.3 (Teste da Integral) *Seja $f(x)$ decrescente e positiva, denotemos com $a_n = f(n)$. Logo*

1. *se $\int_1^\infty f(x)\, dx < \infty$ então a série $\sum_{k=1}^\infty a_k$ converge*

2. *se $\int_1^\infty f(x)\, dx = \infty$ então a série $\sum_{k=1}^\infty a_k$ diverge*

Proof: Basta observar que

$$f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq f(1) + \cdots + f(n-1)$$

isto é

$$\sum_{k=2}^n a_k \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

Tomando limite quando $n \to \infty$ a série pode ser comparada com a integral. $\square$

Exemplo: Consideremos a série $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln(n)}$. Vemos que $\frac{1}{n\ln(n)} = f(n)$ onde $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$. Analizemos a integral

$$\int_2^\infty f(x)\, dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\, dx = \ln(\ln(x))\Big|_2^\infty = \infty.$$

Dai segue que a série diverge. Agora se consideramos a série $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ com $p > 1$ vemos que a integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^p}\, dx = \frac{(\ln(x))^{1-p}}{1-p}\Big|_2^\infty = \frac{(\ln(2))^{1-p}}{p-1} < \infty.$$

Portanto esta série converge

4.4 Representação Decimal

Nesta seção mostraremos que todo número real pode ser representado por um "número decimal", para isso basta representar por "números decimais" os números reais do intervalo $[0, 1[$, dado que a representação dos números reais pode ser obtido mediante traslação conveniente por um número inteiro ao intervalo $[0, 1]$.

Definição: Uma dízima é uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujos elementos oscilam entre os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9. Esta sequência será denotada por $.a_1a_2a_3\ldots$ onde o ponto da frente representa "0," que desde a escola são usados para representar "números decimais" do intervalo $[0, 1[$.

Denotemos com D o conjunto de todas as dízimas, estabeleceremos una correspondência entre D e os reais do intervalo $[0,1]$. Definamos a função $f : D \to \mathbb{R}$ por

$$f(.a_1a_2\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}. \tag{4.2}$$

Vejamos que esta função está bem definida (a série converge) e assume somente valores no intervalo $[0,1]$, isto é, que a série converge e a soma varia entre 0 e 1. De fato, como

$$\frac{0}{10^n} \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{10^n} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 1, \quad \text{(convergem)}$$

pelo critério de comparação temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge e

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq 1.$$

Infelizmente a função f não é injetiva em D, para poder estabelecer uma correspondência biunívoca entre D e $[0,1]$. De fato, Seja α_j um algarismo tal que $\alpha_j \leq 8$, consideremos as dízimas

$$\alpha = .a_1a_2\ldots a_{j-1}a_j99\ldots, \quad \beta = .a_1a_2\ldots a_{j-1}(a_j+1)00\ldots \tag{4.3}$$

que evidentemente são distintas, porém

$$\begin{aligned}
f(.a_1a_2\ldots a_{j-1}a_j99\ldots) &= \sum_{n=1}^{j} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{n=1}^{j} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9}{10^{k+j+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{j} \frac{a_n}{10^n} + \frac{9}{10^{j+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \sum_{n=1}^{j} \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^j} \\
&= \sum_{n=1}^{j-1} \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_j+1}{10^j} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{0}{10^n} \\
&= f(.a_1a_2\ldots a_{j-1}(a_j+1)00\ldots)
\end{aligned}$$

isto é, $f(\alpha) = f(\beta)$ o qual mostra que f não injetora. Agora consideremos duas dízimas $\alpha = .a_1a_2\ldots$ e $\beta = .b_1b_2\ldots$ distintos tal que $f(\alpha) = f(\beta)$ mostraremos que estes decimais são da forma (4.3). De fato, seja j o primeiro índice tal que $a_j \neq b_j$, suponhamos que $a_j < b_j$, então

$$0 = f(\beta) - f(\alpha) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{10^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{b_j - a_j}{10^j} = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n}$$

mais ainda,

$$\frac{1}{10^j} \leq \frac{b_j - a_j}{10^j} = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^j}$$

portanto todos os termos entre as desigualdades coincidem logo $b_j - a_j = 1$ e $a_n - b_n = 9$, para todo $n \geq j+1$, dai conclui-se que

$$b_j = a_j + 1 \quad \text{e} \quad a_n = 9, \quad b_n = 0 \quad \text{para} \quad n \geq j+1,$$

isto é, α e β são da forma (4.3).

Tendo em conta a análise anterior se restringirmos a função f ao subconjunto D^* formado por dízimas que não tem todos seus algarismos iguais a 9 a partir de uma certa ordem então f será injetiva neste conjunto. Observe que não exite $\alpha \in D^*$ tal que $f(\alpha) = 1$ (Exercício). Mostraremos agora que $f : D^* \to [0,1[$ é sobrejetiva e com isso teremos uma uma correspondência biunívoca entre D^* e $[0,1[$.

Seja $r \in [0,1[$. Decompondo este intervalo em 10 partes iguais, temos que $[0,1[= \displaystyle\bigcup_{j=0}^{9} \left[\frac{j}{10}, \frac{j+1}{10}\right[$, então r pertence somente a um desses subintervalos a qual denotaremos com $\left[\dfrac{a_1}{10}, \dfrac{a_1+1}{10}\right[$, note que $\left|\dfrac{a_1}{10} - r\right| \leq \dfrac{1}{10}$. A sequir decompomos o intervalo $\left[\dfrac{a_1}{10}, \dfrac{a_1+1}{10}\right[$ em 10 partes iguais, isto é

$$\left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right[= \bigcup_{j=0}^{9} \left[\frac{a_1}{10} + \frac{j}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{j+1}{10^2}\right[$$

então r pertence somente a um desses subintervalos a qual denotaremos com $\left[\dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2}, \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2+1}{10^2}\right[$, note que $\left|\dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} - r\right| \leq \dfrac{1}{10^2}$. Continuando com este processo encontramos algarismos $a_3, a_4, \ldots$ tal que

$$\left|\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} - r\right| \leq \frac{1}{10^n}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Denotemos por $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$. Pelo fato de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ concluimos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = r$, isto é

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Se $\alpha = .a_1a_2\ldots \in D^*$ temos que $f(\alpha) = r$. Se $\alpha \notin D^*$, então $\alpha = a_1a_2\ldots a_j99\ldots$, com $a_j \leq 8$, então tomamos $\beta = a_1a_2\ldots(a_j+1)00\ldots \in D^*$ e portanto $f(\beta) = r$, logo f e sobrejetora.

Definição: Uma dízima periódica é uma dízima na qual após um número finito de termos há um bloco de algarismos (chamado período) a partir da qual os algarismos restantes é constituída pela repetição sucessiva desse bloco. Exemplos:

$$\begin{array}{rlll}
(i) & .88666\ldots & \text{denotada por} & .88\overline{6} \\
(ii) & .577232323\ldots & \text{denotada por} & .572\overline{23} \\
(iii) & .642642642\ldots & \text{denotada por} & .\overline{642} \\
(iv) & .2345000\ldots & \text{denotada por} & .2345\overline{0} \quad \text{ou} \quad .2345
\end{array}$$

No que segue identificaremos a dizima $.a_1a_2\ldots$ com $f(.a_1a_2\ldots)$, isto é

$$.a_1a_2a_3\ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots.$$

Neste caso, observe que o exemplo (ii) pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned}
.577\overline{23} &= \frac{5}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\frac{2}{10^6}+\frac{3}{10^7}+\cdots \\
&= \frac{577}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\frac{23}{10^7}+\cdots \\
&= \frac{577}{10^3}+\frac{23}{10^5}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{(10^2)^2}\cdots\right) \\
&= \frac{577}{10^3}+\frac{23}{10^5}\frac{10^2}{(10^2-1)} \\
&= \frac{577(10^2-1)+23}{10^3(10^2-1)} \\
&= \frac{57723-577}{10^3(10^2-1)}
\end{aligned}$$

Definição: Uma dízima periódica é simples se for constituida unicamente pelo bloco periódico, caso contrário a dízima periódica é composta. A dizima periódica do exemplo (iii) é simples, as restantes são compostas.

Theorem 4.4.1 *Toda dízima periódica* $.a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m}$ *é um racional. Mais ainda*

$$.a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m}=\frac{a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m-a_1a_2\ldots a_n}{10^n(10^m-1)}\in\mathbb{Q}$$

Proof: usando a representação pelas séries, temos que

$$\begin{aligned}
.a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m} &= \frac{a_1a_2\ldots a_n}{10^n}+\frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^{n+m}}+\frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^{n+2m}}+\cdots \\
&= \frac{a_1a_2\ldots a_n}{10^n}+\frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^{n+m}}\left(1+\frac{1}{10^m}+\frac{1}{10^{2m}}+\cdots\right) \\
&= \frac{a_1a_2\ldots a_n}{10^n}+\frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^{n+m}}\left(\frac{10^m}{10^m-1}\right) \\
&= \frac{a_1a_2\ldots a_n(10^m-1)+b_1b_2\ldots b_m}{10^n(10^m-1)} \\
&= \frac{a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_m-a_1a_2\ldots a_n}{10^n(10^m-1)}
\end{aligned}$$

□

Corollary 4.4.2 *Para dízimas periódicas simples temos que*

$$.\overline{b_1b_2\ldots b_m}=\frac{b_1b_2\ldots b_m}{10^m-1}.$$

Theorem 4.4.3 *Todo racional em* $[0,1[$ *é uma dízima periódica*

Proof: seja $\dfrac{p}{q}\in[0,1[$ uma fração irredutível. Logo, q e 10 são coprimos ou não. Consideremos cada um desses casos.

Caso I q e 10 são coprimos: neste caso os possíveis restos da divisão de todas as potências de 10 com q é em número finito os quais oscilam entre 1 e $q-1$. Portanto existem índices $m_1 < m_2$ tal que a divisão de 10^{m_1} e 10^{m_2} por q tem o mesmo resto r_0, isto é

$$10^{m_1} = a_1 q + r_0 \quad \text{e} \quad 10^{m_2} = a_2 q + r_0, \quad \text{com} \quad 1 \leq r_0 \leq q-1$$

Logo

$$10^{m_1}(10^m - 1) = (a_2 - a_1)q, \quad \text{onde} \quad m_1 + m = m_2$$

como q não divide 10^{m_1} então divide $10^m - 1$, isto é existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $10^m - 1 = aq$. Portanto $\dfrac{1}{q} = \dfrac{a}{10^m - 1}$, logo

$$\frac{p}{q} = \frac{ap}{10^m - 1}$$

Como $\frac{p}{q} < 1$ temos que ap é composto de no máximo $m-1$ algarismos não nulos o qual pode ser completado com zeros a esquerda ate completar m algarismos, e pelo corolário ? segue que p/q é uma dízima periódica simples.

Caso II q é 10 não são coprimos: neste caso q é divisível por 2 ou 5, logo $q = 2^{n_1}5^{n_2}b$ onde b e 10 coprimos e n_1 e n_2 não se anulam simultaneamente. Do caso anterior temos que

$$\frac{1}{b} = \frac{N}{10^m - 1}$$

onde N é um número natural, portanto

$$\frac{p}{q} = \frac{N}{2^{n_1}5^{n_2}(10^m - 1)} = \frac{2^{n-n_1}5^{n-n_2}N}{10^n(10^m - 1)} = \frac{M}{10^n(10^m - 1)},$$

onde $n = n_1 + n_2$. Como $\frac{p}{q} < 1$ segue que M é composto de no máximo $n + m - 1$ algarismos à qual podemos acrescentar zeros a esquerda ate completar m algarismos. Como M pode ser escrito da forma $a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n - a_1 a_2 \ldots a_n$ (exercício) temos do teorema ?, que p/q é uma dízima periódica composta. $\square$

Exemplo: A decimal .010010001... onde o numero de zeros entre os $1's$ vai aumentando não é racional.

4.5 Exercícios

1. Mostre que as seguintes séries são convergentes e calcule sua soma.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^2}{(1+a^2)^n}, \quad a \neq 0.$$

2. Seja $a > -1$. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a+1}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = 1.$$

   Dica: Manipule os termos da série para torna-a uma série telescópica.

3. Use o exercício anterior com $a = 0$ e $a = -1/2$ para mostrar a seguinte estimativa:

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

4. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 1/n)$ diverge. Dica: Considere as somas parciais e manipule o termo geral para torna-a uma soma telescópica.

5. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente, consideremos uma sequência crescente $n_1 < n_2 < \ldots$, defina

$$b_1 = a_1 + \cdots + a_{n_1}, \quad b_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \quad b_3 = a_{n_2+1} + \cdots + a_{n_3}, \quad \text{etc.}$$

   Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e tem a mesma soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. Seja $|r| < 1$, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} r^n = \frac{r^2}{1-r}, \quad \sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}, \ k \in \mathbb{N}$$

7. Use o critério de comparação para estabelecer a convergência ou divergência das seguintes séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}.$$

8. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de números reais positivos, tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Dica: Mostre que $na_{2n} \leq s_{2n} - s_n$ onde s_n é a soma parcial da série.

9. Estude a convergência das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{2n-1}{2n} \right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}.$$

   Dica: Compare essas séries com as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

10. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos, e suponha que

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Mostre que as séries, ou ambas convergem ou ambas divergem.

11. Seja $|r| < 1$. Mostre que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)r^n$ são absolutamente convergentes. Dica: Use o exercício 8 para mostrar que $\lim_{n\to\infty} n|r|^{n/2} = 0$, logo para n suficiente mente grande $n|r|^{n/2} < 1$ e portanto $n|r|^n \leq |r|^{n/2}$.

12. Seja $0 < p < 1$, mostre que a série $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge.

13. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > -a/r$. Mostre que a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a+nr}$ diverge.

14. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Se esta série for convergente, mostre que:

    (a) A série $\sum a_n^2$ converge e que a recíproca não vale. Dica: compare a_n^2 com a_n para n suficientemente grande.

    (b) Para $p > 1$ a série $\sum a_n^p$ converge. Que podemos afirmar se $p < 1$?

15. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Mostre a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é absolutamente convergente. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ converge?

16. Suponha que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convirjam. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é absolutamente convergente. Neste caso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge?

17. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$ converge. (Dica: $a_n + b_n > a_n$)

18. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios de ordem m_p e m_q respectivamente e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(n) \neq 0$ para $n \geq n_0$. Mostre que a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ converge quando $m_q \geq m_p+2$ e diverge quando $m_p \geq m_q$. Determine a convergência ou divergência das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 - n + 1}{n^7 + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^4 + 1}{7n^4 + n^2 - 1}.$$

19. Supondo que $a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$, prove que $\sum a_n$ converge se e somente se $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ converge.

20. Usando o teste da razão, raiz ou integral determine a convergência ou divergência das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}.$$

21. Use o teste da integral para mostrar que as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p}$ convergem quando $p \geq 1$ e divergem quando $0 < p < 1$.

22. Mostre que não exite $\alpha \in D^*$ tal que $f(\alpha) = 1$, onde D^* o conjunto de dízimas que não tem todos seus algarismos iguais a 9 a partir de uma certa ordem e f é dado por (4.2).

23. Represente em dízimas e especifique se são simples ou compostas, os seguintes números racionais

$$\frac{3}{10} + \frac{9}{100000} + \frac{4}{1000} + \frac{7}{99}, \quad \frac{1}{9} + \frac{35}{999}$$

24. Segundo o teorema 4.4.1 temos que

$$.a_1a_2 \ldots a_n\bar{0} = \frac{a_1a_2 \ldots a_n0 - a_1a_2 \ldots a_n}{10^n 9}.$$

Mostre que

$$.a_1a_2 \ldots a_n\bar{0} = \frac{a_1a_2 \ldots a_n}{10^n}.$$

25. Seja $N \in \mathbb{N}$ que tem $n + m$ algarismos. Mostre que N pode ser escrito da forma

$$N = a_1a_2 \ldots a_nb_1b_2 \ldots b_m - a_1a_2 \ldots a_n.$$

Dica: Utilize o algoritmo da divisão $N = a(10^m - 1) + b$.

26. [Representação binária] Considere A o conjunto das sequências $a = (a_n)$ onde cada termo da sequência é um algarismo entre 0 e 1. Se definimos $g : A \to \mathbb{R}$ por

$$g(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

Mostre que g esta bem definida e que $0 \leq g(a) \leq 1$. Seguidamente, mostre que esta função não é injetiva.

Capítulo 5

Limites e Continuidade de Funções

Um função real f de variável real é uma função definida num subconjunto $D_f \subset \mathbb{R}$ assumindo valores reais, isto é, para cada $x \in D_f$, f atribui o valor real $f(x)$. Assim adotaremos a notação

$$\begin{array}{rcl} f : D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

O domínio D_f da função f as vezes será denotado por $D(f)$ ou simplesmente por D. Como vimos na seção 1.1, uma função está determinada por seu domínio D_f e sua regra de correspondência $x \mapsto f(x)$. Quando explicitamos unicamente a regra de correspondência de uma função sem determinar o domínio, entende-se que o domínio desta função é o maior conjunto onde a regra de correspondência faz sentido.

Exemplo: a regra de correspondência $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ só faz sentido se $x \neq \pm 1$, logo como não se faz menção do domínio este por convenção será o conjunto $D_f := \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

Exemplo: As funções cujas regras de correspondência são dadas por

$$f(x) = \sqrt{x(x-1)} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1},$$

não são iguais, dado que seus domínios são distintos pois

$$D_f =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[, \quad D_g = [1, \infty[.$$

É claro que as regras de correspondência coincidem se restringimos as funções ao intervalo $[1, \infty[$, isto é, $f\big|_{[1,\infty[} = g$.

Definição: A imagem de uma função f, denotada por $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(D_f)$, é o conjunto de valores que a função assume, isto é

$$Im(f) = \{f(x) : x \in D_f\} = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe } x \in D_f \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Por exemplo, a imagem da função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ é $[0, 1[$, de fato, desde que $x^2 < x^2 + 1$ temos que $0 \leq f(x) < 1$ isto é $\mathrm{Im}(f) \subset [0, 1[$. Reciprocamente, se $y_0 \in [0, 1[$, considerando $x_0 = \pm\sqrt{\frac{y_0}{1-y_0}}$ verifica-se $f(x_0) = y_0$, logo $[0, 1[\subset \mathrm{Im}(f)$. Portanto $\mathrm{Im}(f) = [0, 1[$.

Definição: O gráfico da função é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y = f(x)$, isto é,

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$$

5.1 Limites de funções

No que segue, denotemos $I_\delta(x_0) :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ onde $\delta > 0$.

Definição. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de A se

$$(A \setminus \{x_0\}) \cap I_\delta(x_0) \neq \emptyset, \quad \forall \delta > 0.$$

Denotaremos com A' ao conjunto de todos os pontos de acumulação de A.

Exemplos: Vejamos que se $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ então $A' = \{0\}$. De fato, se fixamos $\delta > 0$ como $\dfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in I_\delta(0)$ para todo $n \geq n_0$, logo $(A \setminus \{x_0\}) \cap I_\delta(x_0) \neq \emptyset$. Portanto $\{0\} \subset A'$. Agora observe que se $x_0 \neq 0$, temos que$|x_0| > 0$, e como $\dfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{|x_0|}{2}$ para todo $n > n_1$, portanto se consideramos $\delta_0 > 0$ dado por

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \left|\frac{1}{n} - x_0\right|, \ \forall\ n = 1, \dots n_1 \text{ talque } \frac{1}{n} \neq x_0\right\}$$

temos que $(A \setminus \{x_0\}) \cap I_{\delta_0}(x_0) = \emptyset$, portanto $x_0 \notin A'$ e consequentemente $A' = \{0\}$. Deixaremos que o leitor verificar que

1. Se $A = \mathbb{N}$ então $A' = \emptyset$.
2. Se $A =]0, 1] \cap \{2\}$ então $A' = [0, 1]$.
3. $A = \mathbb{Q}$ então $A' = \mathbb{R}$.

Theorem 5.1.1 *Se x_0 é um ponto de acumulação de A então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $A \setminus \{x_0\}$ de termos distintos entre si tal que $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$.*

Proof: Consideremos $\delta_1 = 1$, escolhemos $x_1 \in (A \setminus \{x_0\}) \cap I_{\delta_1}(x_0)$. Seguidamente consideremos $\delta_2 = \min\{|x_1 - x_0|, 1/2\}$ e escolhemos $x_2 \in (A \setminus \{x_0\}) \cap I_{\delta_2}(x_0)$. Claramente $x_2 \neq x_1$. Para $n \geq 3$, escolhemos x_n recursivamente da seguinte forma: consideramos $\delta_n = \min\{|x_{n-1} - x_0|, 1/n\}$ e escolhemos $x_n \in (A \setminus \{x_0\}) \cap I_{\delta_n}(x_0)$. Desta forma geramos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $A \setminus \{x_0\}$ cujos termos são diferentes entre si e pelo fato de $x_n \in I_{\delta_n}(x_0)$ temos que $|x_n - x_0| < \delta_n \leq 1/n$ de onde segue que $x_n \to x_0$. $\square$

Definição Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D_f'$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f quando x se aproxima de x_0, e denotamos $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, se para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, tal que:

$$\text{para todo } x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ com } |x - x_0| < \delta, \text{ tem-se que } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observação: A definição anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\text{para todo } x \in (D_f \setminus \{x_0\}) \cap I_\delta(x_0), \text{ tem-se que } f(x) \in I_\epsilon(L).$$

Exemplo: Consideremos as seguintes funções: $f(x) = c$ onde c é uma constante, $g(x) = 2x + 3$ e $h(x) = x^2 + 1$, intuitivamente temos que

$$(a) \ \lim_{x\to x_0} f(x) = c, \quad (b) \ \lim_{x\to -1} g(x) = 1, \quad (c) \ \lim_{x\to 1} h(x) = 2.$$

Mostremos a veracidade de nossa intuição. Mostraremos (b) e (c) deixando pro leitor a prova do item (a). Seja $\epsilon > 0$. Observe que, iríamos ter que

$$|g(x) - 1| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2|x + 1| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x + 1| < \epsilon/2,$$

logo basta tomar $\delta = \epsilon/2$ e nessas condições se $|x+1| < \delta$ teremos que $2|x+1| < \epsilon$ e portanto $|g(x) - 1| < \epsilon$, isto mostra o item (b). Item (c): iríamos ter que

$$|h(x) - 2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x+1||x-1| < \epsilon.$$

Observe que $|x+1| = |x-1+2| \leq |x-1| + 2$, logo se assumimos inicialmente que $|x-1| < 1$ teremos que

$$|x+1||x-1| < 3|x-1|,$$

Portanto, se assumimos também que $|x-1| < \epsilon/3$ então $|h(x) - 2| < \epsilon$, logo segundo estas condições, tomando $\delta = \min\{1, \epsilon/3\}$ teremos que, se $|x-1| < \delta$ então $|x-1| < 1$ e $|x-1| < \epsilon/3$ e portanto $|h(x) - 2| < \epsilon$.

Theorem 5.1.2 *O limite de uma função é único.*

Proof: Sejam L_1 e L_2 limites de f quando $x \to x_0 \in D_f'$, fixemos $\epsilon > 0$. Por hipótese, temos que existem δ_1, δ_2 positivos tal que

$$\begin{aligned}&\text{para } x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ com } |x - x_0| < \delta_1, \text{ tem-se que } |f(x) - L_1| < \epsilon/2,\\ &\text{para } x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ com } |x - x_0| < \delta_2, \text{ tem-se que } |f(x) - L_2| < \epsilon/2.\end{aligned}$$

Considerando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que para $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ com $|x - x_0| < \delta$, tem-se

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \epsilon.$$

Sendo ϵ arbitrário, segue que $L_1 = L_2$. □

Definição: Dizemos que uma função f é limitada superiormente no subconjunto $A \subset D_f$, quando existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq \beta$, $\forall x \in A$. Quando exista $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq f(x)$, $\forall x \in A$ a função é dita limitada inferiormente em A. Se f é limitada superiormente e inferiormente em A, dizemos que é limitada em A, e caso f seja limitada (ou limitada superiormente ou limitada inferiormente) em todo seu domínio D_f dizemos simplesmente que f é limitada (ou limitada superiormente ou limitada inferiormente).

Deixamos pro leitor, mostrar que f é limitada no subconjunto $A \subset D_f$, se e somente se, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

Theorem 5.1.3 *Se existe* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *então existe* $\delta > 0$ *tal que* f *é limitada em* $D_f \cap I_\delta(x_0)$

Proof: Seja $\epsilon = 1$, pelo fato de existir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ tal que } |x - x_0| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - L| < 1.$$

Observe que, para todo $x \in D_f \cap I_\delta(x_0)$, com $x \neq x_0$, temos que

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| \leq 1 + |L|.$$

Se $x_0 \notin D_f$ o teorema esta mostrado. Caso $x_0 \in D_f$ temos que $|f(x)| \leq \max\{1 + |L|, |f(x_0)|\}$ para todo $x \in D_f \cap I_\delta(x_0)$. □

Exemplo: Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ logo temos que $0 \in D_f'$ porem não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ pois ela não é limitada nas proximidades de 0.

Theorem 5.1.4 *L é o limite de f em $x_0 \in D_f'$, se e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D_f \setminus \{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$ tem-se que $f(x_n) \to L$.*

Proof: ($\Rightarrow$): Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ tal que } |x - x_0| < \delta, \text{ tem-se } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Consideremos então uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D_f \setminus \{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $|f(x_n) - L| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$, isto é, $f(x_n) \to L$.
($\Leftarrow$): Procedamos pelo absurdo, isto é, suponhamos que L não é o limite de f quando $x \to x_0$, logo deve existir $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta_n = 1/n$ existe $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ tal que $|x_n - x_0| < \delta_n$ e $|f(x_n) - L| \geq \epsilon_0$ assim L não pode ser o limite da sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Por outro lado, como $x_n \to x_0$, por hipótese deveríamos ter que $f(x_n) \to L$ o qual fornece a contradição desejada. □

Exemplo: a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

não possui limite em nenhum ponto, pois para $x_0 \in \mathbb{R}$ existe uma sequência de racionais $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e irracionais $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se aproximando de x_0, porém como $f(r_n) = 1$ é $f(i_n) = 0$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(i_n)$ de onde concluimos que o limite não pode existir.
Exemplo: Num exemplo anterior provamos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ para $f(x) = x^2 + 1$. A prova foi realizada usando os $\epsilon's$ e $\delta's$ da definição de limite. Observe que podemos usar o teorema anterior para re-demonstrar este mesmo resultado. De fato, seja (x_n) uma sequência em $D_f \setminus \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que $x_n \to 1$, então $x_n^2 = x_n \cdot x_n \to 1 \cdot 1$, logo $x_n^2 + 1 \to 2$, isto é $f(x_n) \to 2$. Como a sequência (x_n) foi tomada arbitrária, pelo teorema anterior podemos concluir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

Corollary 5.1.5 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponhamos que existam os limites*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = M.$$

Então existem os limites, quando x se aproxima de x_0, das seguintes funções

1. *$f + g$, e $\lim\limits_{x\to x_0} (f + g)(x) = L + M$,*

2. *αf, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha L$,*

3. *fg, e $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = LM$,*

4. *f/g caso $M \neq 0$, e $\lim\limits_{x\to x_0} (f/g)(x) = L/M$.*

Proof: É consequência do teorema anterior, portanto a prova fica como exercício para o leitor.
□

Exemplo: Mostremos que

$$\lim_{x\to -1} \frac{x(2x + 1)}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Deixamos ao leitor provar que, para $f(x) = x$, existe $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$. Em vista disso, pelo teorema anterior, temos que existiram os limites:

$$\lim_{x\to -1}(2f(x)+1) = -1, \quad \lim_{x\to -1}(f(x)f(x)+1) = 2.$$

Considerando o cociente destes termos segue o resultado desejado.

Limites Laterais

Definição: Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, umponto $x_0 \in \mathbb{R}$ é dito *ponto de acumulação à direita* do conjunto A se

$$A \cap]x_0, x_0+\delta[\neq \emptyset, \quad \forall \delta > 0.$$

Ao conjunto de pontos de aculação à direita de A denotaremos com A'_+. Da mesma forma que na definição anterior, dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à esquerda do conjunto A se

$$A \cap]x_0-\delta, x_0[\neq \emptyset, \quad \forall \delta > 0,$$

e o conjunto de pontos de acumulação a esquerda de A, será denotado por A'_-.

Definição: Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D'_+$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite lateral de f à direita de x_0, e denotamos $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, se para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$\text{para todo } x \in D \text{ com } x_0 < x < x_0+\delta, \text{ tem-se } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Analogamente, se $x_0 \in D'_-$, $L \in \mathbb{R}$ será dito o limite lateral de f à esquerda de x_0, e denotamos $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$, se para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$\text{para todo } x \in D \text{ com } x_0-\delta < x < x_0, \text{ tem-se } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Exemplo: se consideramos a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

pode-se verificar usando a definição que existem limites laterais $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (faça-o!). Por outro lado, usando a caracterização do limite usando sequências pode-se mostrar que não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Logo, a existência de limites laterais não implica a existência do limite.

Theorem 5.1.6 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $x_0 \in D'_+ \cap D'_-$. Então*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \ \textit{se e somente se}, \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \ \textit{e} \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L.$$

Proof: Mostremos que, se os limites laterais existem e coincidem, então existe o limite de f, a outra implicação deixamos para o leitor. De fato, seja $\epsilon > 0$, da existencia dos limites laterais temos que existem δ_1, δ_2 positivos tal que:

- para todo $x \in D$ com $x_0 - \delta_1 < x < x_0$, tem-se $|f(x) - L| < \epsilon$,
- para todo $x \in D$ com $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, tem-se $|f(x) - L| < \epsilon$.

Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo se $0 < |x - x_0| < \delta$ temos que $x \neq x_0$ e

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad \text{ou} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{ou} \quad x_0 < x < x_0 + \delta,$$

consequentemente

$$\text{ou} \quad x_0 - \delta_1 < x < x_0 \quad \text{ou} \quad x_0 < x < x_0 + \delta_2.$$

Portanto temos que $|f(x) - L| < \epsilon$, logo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. □

Exemplo: Consideremos as funções

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \frac{1-x^2}{1-x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Deixaremos que o leitor mostre que existem os limites laterais de f no ponto $x_0 = 0$ e assumem valores distintos, logo podemos afirmar que não existe o limite de f no nesse ponto. Agora, pode-se mostrar que existem os limites laterais de g no ponto 0 e ambos tendo limite 0, logo podemos afirmar que existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

5.2 Limites infinitos

Definição: Dizemos que o limite de f, quando x se aproxima de $x_0 \in D_f'$, é infinito (∞), e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

se, para cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\text{se } x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ com } |x - x_0| < \delta, \text{ tem-se que } f(x) > M.$$

Analogamente, o limite de f, quando x se aproxima de x_0, é menos infinito $(-\infty)$, e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

se, para cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\text{se } x \in D_f \setminus \{x_0\} \text{ com } |x - x_0| < \delta, \text{ tem-se que } f(x) < -M.$$

Exemplo: Considere a função $f(x) = 1/x^2$, vejamos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$. De fato, fixando $M > 0$, temos que:

$$f(x) > M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} > M \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Portanto, tomando $\delta = 1/\sqrt{M}$, temos que se $x \in D_f$ com $|x - 0| < \delta$, vale que $f(x) > M$.

Theorem 5.2.1 *Seja f uma função real e $x_0 \in D_f'$. Então $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), se e somente se, para toda sequência (x_n) em $D_f \setminus \{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$, tem-se que $f(x_n) \to \infty$ (ou $-\infty$).*

Proof: A prova segue exatamente as mesmas ideias do teorema 5.1.4 e portanto é deixado como exercício pro leitor. □

Exemplo: Considere a função $f(x) = 1/x$. Observe que, se consideramos a sequência $x_n = 1/n$ temos que $f(x_n) = n \to \infty$, agora se consideramos as sequência $y_n = -1/n$, temos que $f(y_n) = -n \to -\infty$, isto é, embora ambas sequências se aproximem de zero as correspondentes imagens não se aproximam de um mesmo valor $L \in [-\infty, \infty] :=] - \infty, \infty[\cup\{-\infty, \infty\}$, logo podemos afirmar que não existe o limite de f quando $x \to 0$.

Limites no Infinito: Seja f uma função real. Caso $D_f \supset [a, \infty[$ ou $]-\infty, b]$, em alguns casos é necessário estudar o comportamento da função em pontos cujo valor absoluto é arbitrariamente grande.

Definição: Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f, quando x cresce indefinidamente ($x \to \infty$), e escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

se, para cada $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que,

$$\text{para todo } x \in D_f \text{ com } x > N \text{ tem-se que } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Exemplo: Considere a função $f(x) = x/(x + 1)$, vejamos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. De fato, fixando $\epsilon > 0$, temos que:

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \frac{1}{|x+1|} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x + 1| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Como $|x + 1| \geq x + 1$ basta que $x > (1/\epsilon) - 1$, portanto, fixando qualquer $N > 0$ talque $N > (1/\epsilon) - 1$, teremos que, para $x > N$

$$|x + 1| = x + 1 > N + 1 > \frac{1}{\epsilon},$$

e portanto $|f(x) - 1| < \epsilon$.

5.3 Funções contínuas

Definição. Dizemos que a função f é contínua em $x_0 \in D_f$, se para cada $\epsilon > 0$ é possível encontrar $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, tal que

$$\text{para todo } x \in D_f \text{ com } |x - x_0| < \delta, \text{ tem-se que } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{3.1}$$

Uma função é dita contínua se for contínua em cada ponto do seu domínio. Note que (3.1) pode ser escrita da forma

$$\text{para todo } x \in D_f \cap I_\delta(x_0), \text{ tem-se que } f(x) \in I_\epsilon(f(x_0)).$$

Observação: Note que se $x_0 \in D_f$ é um ponto isolado (:=ponto que não é de acumulação de D_f), então existe $\delta > 0$ tal que $D_f \cap I_\delta = \{x_0\}$, neste caso (3.1) é satisfeito, portanto f é contínua em x_0. Por outro lado, se $x_0 \in D'_f$, f será contínua nesse ponto, se e somente se,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mais ainda, o leitor poderá verificar que, caso $x_0 \in (D_f)'_+ \cap (D_f)'_-$, f será contínua em x_0 se existem os limites laterais em torno de x_0 e

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemplo Vejamos que $f(x) = e^x$ é contínua em $x = 0$. De fato, seja $\epsilon > 0$. Então, para $x > 0$ iremos ter que

$$|e^x - 1| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; e^x - 1 < \epsilon \;\Leftrightarrow\; e^x < 1 + \epsilon \;\Leftrightarrow\; x < \ln(1+\epsilon) \;\Leftrightarrow\; |x| = x < \ln(1+\epsilon).$$

Por outro lado, para $x < 0$ iremos ter que

$$|e^x - 1| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; 1 - e^x < \epsilon \;\Leftrightarrow\; 1 - \epsilon < e^x \;\Leftrightarrow\; \ln(1-\epsilon) < x \;\Leftrightarrow\; |x| = -x < -\ln(1-\epsilon).$$

Assim, tomando $\delta = \min\{\ln(1+\epsilon), -\ln(1-\epsilon)\}$ segue que, se $x \in D_f$ com $|x - 0| < \delta$ tem-se que $|f(x) - f(0)| < \epsilon$.

Theorem 5.3.1 *Seja f é contínua em $x_0 \in D_f$ e $c \in \mathbb{R}$.*

1. *Se $f(x_0) < c$, então exite $\delta > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo $x \in D_f \cap I_\delta(x_0)$.*
2. *Se $f(x_0) > c$, então exite $\delta > 0$ tal que $f(x) > c$ para todo $x \in D_f \cap I_\delta(x_0)$.*

Proof: Suponhamos $f(x_0) < c$, como f é contínua em x_0 para $\epsilon = c - f(x_0)$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon, \quad \forall x \in D_f \cap I_\delta(x_0).$$

A desigualdade do lado direito implica que

$$f(x) < c, \quad \forall x \in D_f \cap I_\delta(x_0),$$

o que mostra o primeiro item deste lema. A prova do segundo item fica como exercício para o leitor. □

Observação: O teorema anterior mostra que funções contínuas f preservam localmente o sinal, isto é,

- Se $f(x_0) > 0$ então $f(x) > 0$ para x numa vizinhança de x_0.
- Se $f(x_0) < 0$ então $f(x) < 0$ para x numa vizinhança de x_0.

Theorem 5.3.2 *Uma função real f é contínua em $x_0 \in D_f$ se e somente se, toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D_f tal que $x_n \to x_0$ tem-se que $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Proof: A prova é similar à do teorema 5.1.4 portanto, deixamos os detalhes da prova a para o leitor. □

Exemplo: vejamos que podemos usar a continuidade da função exponencial em $x = 0$ e o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. De fato, observe que

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$$

Como $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$ e $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ é contínua em $x = 0$ temos que

$$e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \to e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{n} \to 1$$

Theorem 5.3.3 (Propriedades) *Seja α uma constante real e sejam f e g duas funções reais contínuas em $x_0 \in D_f \cap D_g$. Então, também são contínuas em x_0 as funções $f+g$, αf, $f \cdot g$. Além disso, se $g(x_0) \neq 0$ então f/g é contínua em x_0.*

Proof: É consequência do teorema anterior. $\square$

Exemplo: Usando teorema 5.3.2 prova-se rapidamente que a função $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$ é contínua em qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. De fato, se (x_n) é uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \to x_0$ segue que $x_n^m \to x_0^m$. Decorre do teorema anterior que todo polinômio é uma função contínua. Também as funções racionais $\frac{p(x)}{q(x)}$, p e q polinômios, são funções contínuas nos pontos onde q não se anula.

Theorem 5.3.4 *Sejam f e g duas funções reais tal que $f(D_f) \subset D_g$. Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0.*

Proof: Seja (x_n) uma sequência em $D(f) = D(g \circ f)$ tal que $x_n \to x_0$, como f é contínua em x_0, pelo teorema 5.3.2 segue que $f(x_n) \to f(x_0)$. Como $(f(x_n))$ é um sequência em D_g e g é contínua em $f(x_0)$, usamos novamente o teorema 5.3.2 para concluir que $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. $\square$

Exemplo: Se assumimos que as funções exponencial e logaritmo são contínuas, usando o teorema anterior podemos mostrar que a função $h :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^r$ onde $r \in \mathbb{R}$ é uma função contínua. De fato, observe que para $x > 0$ temos que

$$h(x) = x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \ln(x)} = (g \circ f)(x), \quad f(x) = r \ln(x), \quad g(x) = e^x.$$

5.4 Funções contínuas definidas em intervalos

Definição: Se existe $x_0 \in D_f$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in D_f$, dizemos que f atinge seu valor máximo em x_0. Analogamente, caso exista $x_1 \in D_f$ tal que $f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in D_f$, dizemos que f atinge seu valor mínimo em x_1

Exemplos:

1. A função $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-|x|}$ assume seu valor máximo (igual a 1) em $x = 0$. Esta função não assume seu valor mínimo embora tenha ínfimo finito pois é limitada inferiormente.

2. A função $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ é ilimitada superiormente logo não tem como assumir seu valor máximo. Esta função é limitada inferiormente e portanto tem ínfimo finito porém não assume seu valor mínimo.

Theorem 5.4.1 *Se f é uma função real contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então f atinge seu valor máximo e mínimo.*

Proof: Vejamos primeiro que f é limitada superiormente. Procedamos pelo absurdo, isto é, suponhamos que f não é limitada superiormente, logo para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in [a, b]$ tal que

$$f(x_n) > n. \tag{4.2}$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass ela admite uma subsequência convergente. Denotando por x_{n_k} tal subsequência temos que $x_{n_k} \to x_0 \in \mathbb{R}$; como $a \leq x_{n_k} \leq b$ segue que $a \leq x_0 \leq b$. Como f é contínua temos que $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e portanto $(f(x_{n_k}))$ é uma sequencia limitada o que contradiz (4.2). Consideremos

$$\beta := \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\},$$

então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in [a,b]$ tal que

$$\beta - \frac{1}{n} < f(z_n) \leq \beta. \tag{4.3}$$

Por outro lado como $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass ela admite uma subsequência convergente. Denotando por z_{n_k} tal subsequência temos que $z_{n_k} \to z_0 \in [a,b]$. Como f é contínua temos que $f(z_{n_k}) \to f(z_0)$ e por causa de (4.3) temos que $f(z_0) = \beta$, isto é, f assume seu valor máximo no ponto z_0. Analogamente mostra-se que f é limitada inferiormente e que assume seu valor mínimo. Os detalhes são deixados para o leitor. $\square$

Theorem 5.4.2 (Valor intermediário) *Se f é uma função real contínua no intervalo $[a,b]$, então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.*

Proof: Suponhamos que $f(a) < f(b)$, seja r tal que $f(a) < r < f(b)$ mostremos que podemos encontrar um ponto $x_0 \in]a,b[$ tal que $f(x_0) = r$. Consideremos o conjunto

$$A = \{z \in [a,b] : f(x) < r, \ \forall x \in [a,z]\}$$

Denotemos $z_0 = \sup A \in [a,b]$ e mostremos que $z_0 \neq a$ e $z_0 \neq b$ e portanto $a < z_0 < b$. De fato, como $f(a) < r$, pelo teorema 5.3.1 existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) < r$ para todo $x \in [a, a+\delta_1] \subset [a,b]$, logo $a < a + \delta_1 \leq z_0$. Por outro lado como $f(b) > r$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) > r$ para todo $x \in]b - \delta_2, b] \subset [a,b]$ logo $A \subset [a, b - \delta_2]$ de onde segue que $z_0 \leq b - \delta_2 < b$. Agora somente uma das seguintes possibilidades é satisfeita: ou $f(z_0) < r$ ou $f(z_0) > r$ ou $f(z_0) = r$. Suponhamos que $f(z_0) < r$, então pelo teorema 5.3.1 existe $\delta_1 > 0$ tal que $[z_0, z_0 + \delta_1] \subset A$ então $[a, z_0 + \delta_1] \in A$ logo $z_0 + \delta_1 \leq z_0$ o qual é um absurdo. Por outro supormos que $f(z_0) > r$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) > r$ para todo $x \in]z_0 - \delta_2, z_0]$, logo $A \cap]z_0 - \delta_2, z_0] = \emptyset$ o que contradiz a definição de z_0 ser o supremo de A. Portanto a única possibilidade restante é que $f(z_0) = r$. $\square$

Exemplo: A equação $x^{50} - 4x^8 + 1 = 0$ tem pelo menos duas raízes reais distintas. De fato, consideremos $p(x) = x^{50} - 4x^8 + 1$ a qual é contínua em $\mathbb{R}$. Como $p(1) = -2 < 0 < 1 = p(0)$ e $p\big|_{[0,1]}$ é contínua pelo teorema anterior segue que existe $x_0 \in]0,1[$, tal que $p(x_0) = 0$. Como $p(-1) = -2 < 0 < 1 = p(0)$ e $p\big|_{[-1,0]}$ é contínua pelo teorema anterior segue que existe $x_1 \in]-1,0[$, tal que $p(x_1) = 0$. Assim $x_0 \neq x_1$ são duas raízes da equação.

Corollary 5.4.3 *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.*

Proof: Sejam $y_1, y_2 \in f(I)$ com $y_1 < y_2$, logo existem $a, b \in I$ tal que $y_1 = f(a)$ e $y_2 = f(b)$. Seja y_0 tal que $y_1 < y_0 < y_2$, logo pelo teorema do valor intermediário existe x_0 entre a e b tal que $f(x_0) = y_0$ o que mostra que $f(I)$ é um intervalo. $\square$

Exemplo: Se I é um intervalo e f não é contínua, $f(I)$ pode não ser um intervalo. De fato, considerando a função definida por $f(x) = 0$ para $x \leq 0$, e $f(x) = x+1$ para $x > 0$, temos que $I = \mathbb{R}$ é um intervalos porém $f(I) = \{0\} \cup]1, \infty[$ obviamente não é um intervalo.

Funções Monótonas

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que

1. f é crescente se se para todo $x, y \in D_f$ tal que $x < y$, tem-se que $f(x) \leq f(y)$.
2. f é estritamente crescente se se para todo $x, y \in D_f$ tal que $x < y$, tem-se que $f(x) < f(y)$.
3. f é decrescente se se para todo $x, y \in D_f$ tal que $x < y$, tem-se que $f(x) \geq f(y)$.
4. f é estritamente decrescente se se para todo $x, y \in D_f$ tal que $x < y$, tem-se que $f(x) > f(y)$.
5. f é monótona se for crescente ou decrescente.

Exemplo: A função $f : [1/2, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(x-1)$ é estritamente crescente. De fato, sejam $x, y \in D_f = [1/2, \infty[$ com $x < y$ então iremos ter que:

$$\begin{aligned} f(x) < f(y) &\Leftrightarrow x^2 - x < y^2 - y \\ &\Leftrightarrow y - x < y^2 - x^2 \\ &\Leftrightarrow 1 < y + x. \end{aligned}$$

Como $y > x \geq 1/2$ segue que $x + y > 1$, logo pelo procedimento anterior temos que f é estritamente crescente.

Lemma 5.4.4 *Seja $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetiva, tal que $f(a) < f(b)$ logo, se $a < c < b$ então $f(a) < f(c) < f(b)$.*

Proof: Provaremos o primeiro item. Procedamos pelo absurdo, isto é, suponhamos que $f(c) \notin]f(a), f(b)[$. Se $f(c) < f(a) < f(b)$ pelo teorema do valor intermediário tem-se que existe $\alpha \in]c, b[$ tal que $f(\alpha) = f(a)$ o que contradiz a injetividade da função f. Analogamente, se $f(a) < f(b) < f(c)$ pelo teorema do valor intermediário tem-se que existe $\beta \in]a, c[$ tal que $f(\beta) = f(a)$ o que nos conduz novamente a uma contradição. $\square$

Theorem 5.4.5 *Seja I um intervalo. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua é injetiva então f é estritamente monótona.*

Proof: Consideremos primeiro o caso em que $I = [a, b]$ $(a < b)$ e para fixar ideias suponhamos que $f(a) < f(b)$. Mostremos que f é crescente. De fato, seja $x < y$ com $x, y \in I$ então temos que $a \leq x < y \leq b$.

Se $x = a$ e $x = b$ então $f(x) < f(y)$. Se $x \neq a$ então temos que $a < x < y$ pelo lema anterior tem-se que $f(a) < f(x) < f(y)$. Agora, se $y \neq b$ então $x < y < b$ pelo lema anterior tem-se que $f(x) < f(y) < f(b)$. Logo f é crescente em $I = [a, b]$. Analogamente, teríamos que a função é decrescente se $f(a) > f(b)$. Agora vejamos o caso em que I é im intervalo qualquer. Suponhamos que f não seja monótona em I, logo devem existir $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$ em I tal que $f(a_1) < f(b_1)$ e $f(a_2) > f(b_2)$ assim tomando $a = \min\{a_1, a_2\}$ e $b = \max\{b_1, b_2\}$, f não seria monótona em $[a,b]$, o qual contradiz a conclusão da primeira parte desta prova, portanto f é monótona em I. $\square$

Exemplo: Se tiramos a condição de I ser um intervalo, o teorema anterior não vale. De fato, a função $f:]0,1[\cup]1,2] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in]0,1[\\ 3-x, & x \in]1,2] \end{cases}$$

é contínua, injetiva, porém não é monótona.

Theorem 5.4.6 *Seja I um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. Se f é contínua então $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Proof: Dado que f é contínua e injetiva pelo teorema anterior ela é estritamente monótona. Assumamos que assumamos que f é estritamente crescente. Seja $y_0 \in f(I)$, consideremos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $f(I)$ tal que $y_n \to y_0$, mostremos que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$ para desta forma concluir que

$$\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0).$$

Basta provar que esta conclusão ainda vale se mesmo que restringirmos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ às sequências monótonas (Exercício!). Portanto assumamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e denotemos com $x_n = f^{-1}(y_n)$ e $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Assim pelo fato de f ser uma função estritamente crescente temos que f^{-1} e estritamente crescente (prove!), logo a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Como $x_n \leq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (porque?) temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente e limitada superiormente e portanto ela é convergente isto é $x_n \to \alpha \leq x_0$. Da continuidade de f em α segue que $f(x_n) \to f(\alpha)$. Com também $f(x_n) \to f(x_0)$ Da unicidade do limite tem-se que $f(\alpha) = f(x_0)$ e portanto $\alpha = x_0$. Dai segue que $x_n \to x_0$ como queríamos mostrar. O mesmo resultado se obtém se consideramos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente. O mesmo resultado também é análogo se f for estritamente decrescente. Estes detalhes são deixados como exercício para o leitor. $\square$

Exemplo: Assumamos que $f(x) = e^x$ é contínua. Segundo o teorema anterior $g(x) = \ln(x)$ é contínua, pois f é contínua e injetiva no intervalo $I = \mathbb{R}$ e $g = f^{-1}$.

Exemplo: Se tiramos a condição de I ser um intervalo, o teorema anterior não vale. De fato, a função $f:]0,1[\cup]1,2] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in]0,1[\\ 3-x, & x \in]1,2] \end{cases}$$

é contínua, injetiva e $\mathrm{Im}(f) =]0,2[$. Calculando sua inversa temos que

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \in]0,1[\\ 3-y, & y \in [1,2[\end{cases}$$

a qual não é contínua em $y = 1$.

Continuidade Uniforme

Definição: Dizemos que uma função f é uniformemente contínua no subconjunto $A \subset D_f$ se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ para todo } x, y \in A \text{ satisfazendo } |x - y| < \delta.$$

Quando $A = D_f$ dizemos simplesmente que f é uniformemente contínua. Note que na definição anterior embora δ possa depender de ϵ, ela não depende dos pontos $x \in A$ de forma isolada, porem pode depender de A, portanto continuidade uniforme não é um conceito local e sim global.

Exemplo: A função $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ é contínua, porém vejamos que não é uniformemente contínua. De fato, assumindo o contrário, para $\epsilon > 0$ fixado, encontramos $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in]0, 1]$ com $|x - y| < \delta$, teremos que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Agora consideremos as sequências $x_n = 1/(2n)$ e $y_n = 1/n$, logo $|x_n - y_n| = 1/(2n)$ e $|f(x_n) - f(y_n)| = n$, portanto, para n suficientemente grande $|x_n - y_n| < \delta$, porém $|f(x_n) - f(y_n)| \not< \epsilon$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

Vejamos agora que f é uniformemente contínua em qualquer subconjunto da forma $[\theta, 1]$ para qualquer $0 < \theta < 1$ fixado. De fato, fixemos $\epsilon > 0$, logo para $x, y \in [\theta, 1]$ temos que

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - x|}{xy} \leq \frac{|y - x|}{\theta^2},$$

pois $x, y \geq \theta$. Tomando $\delta = \epsilon\theta^2$ teremos que quando $|x - y| < \delta$, pela desigualdade acima, teremos que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Exemplo: observe que a função $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é contínua, porem não é uniforme contínua. De fato, se esta função fosse uniformemente contínua, para $\epsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \quad \forall x, y \geq 0 \quad \text{tal que} \quad |x - y| < \delta.$$

Em particular,

$$|f(x + \delta/2) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \geq 0,$$

isto é, $x\delta + \delta^2/4 < \epsilon$ para todo $x \geq 0$, logo

$$x < \frac{1}{\delta}(\epsilon - \delta^2/4), \quad \forall x \geq 0 \quad (\Rightarrow\Leftarrow).$$

Deixamos ao leitor, provar que f é uniformemente contínua nos intervalos da forma $[0, b]$ com $b > 0$.

Theorem 5.4.7 *Se f é contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$ então é uniformemente contínua nesse intervalo.*

Proof: Procedamos por contradição, isto é suponhamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $\delta_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_n \to 0$, existem $x_n, y_n \in [a, b]$ tal que

$$|x_n - y_n| < \delta_n \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \tag{4.4}$$

Por (x_n) ser limitada possui uma subseqüência (x_{n_k}) convergente. Analogamente, por (y_{n_k}) ser limitada, ela possui uma subsequencia convergente a qual será denotada da mesma forma. Como $|x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \delta_{n_k} \to 0$ estas subsequencias possuim o mesmo limite $z_0 \in [a, b]$ de onde, pela continuidade de f, as seqüências $(f(x_{n_k}))$ e $(f(y_{n_k}))$ convergem para o valor $f(z_0)$, portanto $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$ o que entra em contradição com (4.4). □

5.5 Exercícios

1. Encontre o domínio e imagem das seguintes funções. Justifique sua afirmação.

   (a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. (b) $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

2. Prove o recíproco do teorema 5.1.1 vale.

3. Usando a definição de limite, isto é usando ϵ's e δ's, mostre que

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$. (b) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-2x^2+x) = 0$.

4. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D'$. Prove que

   (a) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap I_\delta(x_0)$.

   (b) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (D\setminus\{x_0\}) \cap I_\delta(x_0)$.

5. Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D'$, tal que f é limitada e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

6. Prove que não existe $\lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$, porém existe $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

7. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D'$.

   (a) Se existem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$, mostre que existe $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

   (b) Se existem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x)$, existe $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$? Justifique sua resposta.

8. Mostre que L é o limite lateral de f à direita de x_0 se e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D_f \cap]x_0, \infty[$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

9. Mostre que L é o limite de f à esquerda de x_0 se e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D_f \cap]-\infty, x_0[$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

10. Uma função f é dita monótona se for crescente ou decrescente, isto é, para todo $x, y \in D_f$ com $x < y$ tem-se $f(x) \leq g(x)$ e será decrescente se para todo $x, y \in D_f$ com $x < y$ tem-se $f(x) \geq g(x)$. Seja $a < b$ e $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função monótona e limitada. Mostre que existem os limites

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

11. Dê uma definição, usando ϵ's e δ's se necessário, de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ quando

    (a) $x_0 = -\infty$, $L \in \mathbb{R}$.

    (b) $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = -\infty$.

    (c) $x_0 = \infty$, $L = \infty$

    (d) $x_0 = \infty$, $L = -\infty$.

12. Caracterize cada um dos limites no item anterior usando sequências de forma similar ao Teorema 5.2.1 e realize as provas dos mesmos.

13. Calcule os limites se existirem. Justifique sua resposta usando a definição de limite ou algum outro resultado equivalente.

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

(b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x-1}{1-x^2}$.

(c) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(d) $\lim_{x\to\infty} e^{-\mu x}$, $\mu > 0$.

(e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1-x^2}{x}$.

14. Mostre que a função $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua. Seguidamente mostre a continuidade da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \sqrt{|x|}$.

15. Sejam $a < b < c$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [b,c] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tal que $f(b) = g(b)$. Definimos $h : [a,c] \to \mathbb{R}$ dado por $h(x) = f(x)$ se $x \in [a,b]$ e $h(x) = g(x)$ se $x \in [b,c]$. Mostre que h é uma função contínua.

16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que $f(0) = 0$.

    (b) Se f for contínua em $x_0 = 0$, mostre que é contínua em qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.

17. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e definamos as funções $h^+, h^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$h^+(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \qquad h^-(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Mostre que estas funções são contínuas.

18. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas em x_0. mostre os seguintes itens

    (a) Se $f(x_0) > g(x_0)$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.

    (b) Se $f(x_0) < x_0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < x$ para todo $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real contínua tal que $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

20. Mostre que a função $f(x) = e^x$ é contínua.

21. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita Lipschitziana se é possível encontrar $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ para todo x, y em I. Mostre os seguintes afirmações

    (a) Se $f : I \to \mathbb{R}$ for lipschitziana então é contínua

    (b) Se I for um intervalo limitado e $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ duas funções lipschitzianas, mostre que fg tambem é lipchitziana.

    (c) Mostre que o item anterior falha se o intervalo I não for limitado.

22. Assuma que as funções elementares conhecidas são contínuas. Veja se as seguintes funções assumem seu valor máximo ou mínimo justificando sua afirmação.

    (a) $f(x) = \sin(1/x)$.

    (b) $f(x) = \arctan(x)$.

    (c) $f(x) = 1/\ln(x)$, $D_f =]0, e]$.

23. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > \delta$ para todo $x \in [a,b]$.

24. Considere o polinômio real $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}n + \cdots + a_0$ onde $a_n > 0$.

    (a) Mostre que que $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$.

(b) Se p é de grau ímpar, mostre que p tem uma raiz real, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.

25. Mostre que f é contínua em x_0 se e somente se para toda sequencia monótona $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D_f com $x_n \to x_0$ tem-se que $f(x_n) \to f(x_0)$.

26. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $xf(x) > 0$ quando $x \neq 0$. Mostre que $f(0) = 0$. Dê um exemplo de que este resultado falha se removemos a continuidade da função.

27. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Mostre que f tem um ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Dica: Considere a função $f(x) - x$ e use o teorema do valor intermediário.

28. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(0) = f(1)$ mostre que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = f(x_0 + 1/2)$. Dica: Considere a função $f(x + 1/2) - f(x)$ e use o teorema do valor intermediário.

29. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. Sabe-se que se as seguintes condições são satisfeitas

    (a) I é um intervalo.

    (b) f é contínua

    então f^{-1} é contínua. Dê exemplos onde esta afirmação falha se retiramos alguma dessas condições.

30. Mostre que a função $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ é uniformemente contínua.

31. Mostre que a função $g :]0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sin(1/x)$ não é uniformemente contínua.

Capítulo 6

Derivadas

No decorrer deste capítulo I denotará um intervalo qualquer.

6.1 Funções Deriváveis

Dizemos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável ou diferenciável em $x_0 \in I$ se existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, este limite é denotado por $f'(x_0)$ e é chamado de *derivada de f no ponto x_0*. Caso o limite anterior não exista ou for $\pm\infty$, dizemos que f não é derivável em x_0, ou que não existe derivada de f em x_0.

Note que fazendo a mudança de variáveis $x = x_0 + h$, temos que $x \to x_0$ se e somente se $h \to 0$, assim o limite anterior pode ser escrito da forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Quando a função for derivável em cada ponto do intervalo I, dizemos que f é derivavel em I ou simplesmente derivável.

Exemplo: As funções $f \equiv c$ onde c e uma constante e $g(x) = x$ são deriváveis em qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}$. De fato, como

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{0}{h} = 0, \quad \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

para $h \neq 0$, logo existem os limites e são finitos quando $h \to 0$, de onde concluimos que f e g são derivávies em x_0 e $f'(x_0) = 0$ e $g'(x_0) = 1$.

Exemplo: Para $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função $f(x) = x^n$ é derivável em qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}$. De fato, do binômio de Newton

$$(x_0 + h)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_0^{n-i} h^i, \quad \text{onde} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

temos que

$$\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \binom{n}{3} x_0^{n-3} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}.$$

Como o lado direito tem limite finito quando $h \to 0$ a função é derívável em x_0, além disso temos que $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

Exemplo: A função $f(x) = |x|$ não é derivável em $x_0 = 0$, pois os limites laterais de

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

são 1 e -1 e portanto não coincidem, logo f não é derivável nesse ponto. Deixamos ao leitor mostrar que f é derivável em qualquer ponto $x_0 \neq 0$.

Exemplo: As funções

$$f(x) = |x|x, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

são deriváveis em $x_0 = 0$, pois os limites de

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = |h|, \qquad \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad h < 0 \\ h & \text{se} \quad h > 0 \end{cases}$$

existem e são finitos quando $h \to 0$, alem disso, $f'(0) = 0$ e $g'(0) = 0$.

Theorem 6.1.1 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in I$ então é contínua em x_0.*

Proof: Observe que x_0 é um ponto de acumulação de I, logo para $x \neq x_0$ temos que

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Em vista que o limite do lado direito da igualdade existe, quando $x \to x_0$, e é $f(x_0)$, tem-se que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, logo f é contínua em x_0. □

Exemplo: O recíproco do teorema anterior não é verdade, pois a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x_0 = 0$ porém não é derivável nesse ponto.

Theorem 6.1.2 *Se as funções $f, g : I \to \mathbb{R}$ são deriváveis em $x_0 \in I$, então também são deriváveis em x_0, as funções $f + g$ e fg. Alem disso,*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad e \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Também, se $g(x_0) \neq 0$, a função f/g é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Proof: Mostraremos que o produto e cociente de funções é derivável, deixando ao leitor a derivábilidade da soma de funções. Observe que

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Como existe o limite do lado direito da equação e é $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ temos que o produto fg é derivável e satisfaz a fórmula enunciada. Antes de mostrar que o cociente f/g é derivável, provemos o caso particular quando $f(x) \equiv 1$. Neste caso, temos que

$$\frac{[1/g(x)] - [1/g(x_0)]}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Como o limite o lado direito da igualdade existe e é $-g'(x_0)/g^2(x_0)$, concluimos que $1/g$ é derivável em x_0 e

$$\left[\frac{1}{g}\right]'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Caso geral: Como $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$, dos resultados anteriores temos que f/g é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

□

Observe que, como consequência deste teorema, podemos também podemos afirmar que para qualquer constante c, cf e $f-g$ são deriváveis em x_0 e $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

Exemplo: a função $f(x) = 1/(1-x^2)$ é derivável em qualquer ponto do seu domínio $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ pois $1-x^2 \neq 0$ para $x \neq \pm 1$ o numerador e denominador são deriváveis, alem disso,

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

Observação: Observe que também podemos formular a derivabilidade de $f : I \to \mathbb{R}$ usando seguências: f é derivável em $x_0 \in I$, se e soemente se, para toda sequência (x_n) em $I \setminus \{x_0\}$ tem-se que existe o limite de $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ convergindo a um mesmo ponto $L \in \mathbb{R}$. Neste caso $L = f'(x_0)$.

Theorem 6.1.3 (Regra da Cadeia) *Sejam I, J dois intervalos abertos e $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções, sendo que, f é derivável em $x_0 \in I$ e g derivável em $f(x_0) \in J$, então a composição $g\circ f$ é derivável em x_0, além disso*

$$[g\circ f]'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Proof: Seja (x_n) uma sequência em $I \setminus \{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$. Como f é derivável em x_0 é contínua nesse ponto, logo $f(x_n) \to f(x_0)$. Agora observe que podemos escrever

$$\frac{[g\circ f](x_n) - [g\circ f](x_0)}{x_n - x_0} = \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0},$$

para $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \neq f(x_0)$, sendo assim, se esta condição fosse válida para todo $n \in \mathbb{N}$, o limite do lado direito da igualdade anterior existe e alem disso

$$[g\circ f]'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{[g\circ f](x_n) - [g\circ f](x_0)}{x_n - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

O mesmo resultado temos se $f(x_n) = f(x_0)$ somente para um número finito de índices. Vejamos o caso restante, isto é, suponhamos que $f(x_n) = f(x_0)$ para um numero infinito de índices. Denotemos com $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) = f(x_0)\}$, $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \neq f(x_0)\}$. Claramente $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$, agora observe que se $n \in \mathbb{N}_1$ temos que

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = 0$$

portanto necessariamente $f'(x_0) = 0$ e $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}_1}} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = 0$. Agora, caso $\mathbb{N}_2$ seja infinito, pelo exposto acima, temos que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}_2}} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot 0 = 0.$$

Logo, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = 0 = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

□

Theorem 6.1.4 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetiva. Se f é derivável em $x_0 \in I$ com $f'(x_0) \neq 0$ então f^{-1} é derivável em $y_0 = f(x_0)$, além disso*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Proof: Seja (y_n) uma sequência em $f(I) \setminus \{y_0\}$ tal que $y_n \to y_0$, logo $y_n = f(x_n)$, com $x_n \in I \setminus \{x_0\}$. Como f é contínua e injetiva no intervalo I, segue do teorema 5.4.6 que f^{-1} é contínua em $f(I)$, logo $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$, isto é $x_n \to x_0$. Observe que

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}},$$

e como o denominador do lado direito da igualdade anterior tem limite diferente de zero o limite desta expresão existe e portanto

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Exemplo: Para $n \in \mathbb{N}$, a função $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = y^{1/n}$ é a inversa da função $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$. Como $f'(x) = nx^{n-1}$ não se anula no domínio de f, temos que g é derivável em $f(]0, \infty[) =]0, \infty[$ e

$$g'(y) = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemplo: Vejamos agora que a função $h :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^{n/m}$, onde $n, m \in \mathbb{N}$ é derivável. Como $h(x) = g(f(x))$ onde $f(x) = x^n$ e $g(y) = y^{1/m}$, e estas são deriváveis em $]0, \infty[$, temos que

$$h'(x) = \frac{1}{m}(x^n)^{\frac{1}{m}-1} \cdot nx^{n-1} = \frac{n}{m}\, x^{\frac{n}{m}-1}.$$

Exemplo: Assumamos que $|e^x - 1 - x| \leq M|x|^2$ para todo $x \in]-\delta, \delta[$, para algum M e δ positivos. Mostremos que $\exp(x) = e^x$ é derivável em $x = 0$ e $\exp'(0) = 1$. De fato, Seja (x_n) uma sequencia em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x_n \to 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in]-\delta, \delta[$ para todo $n \geq n_0$, logo, para $n \geq n_0$ temos que

$$\left| \frac{e^{x_n} - 1}{x_n - 0} - 1 \right| = \frac{|e^{x_n} - 1 - x_n|}{|x_n|} \leq M|x_n| \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

portanto $\exp(x)$ é derivável em $x = 0$ e $\exp'(0) = 1$. Neste ponto, por causa deste resultado e o teorema 6.1.4 podemos afirmar que a função inversa $\ln(x)$ é derivável em $x = 1$ e que $\ln'(1) = 1/\exp'(0) = 1$.

6.2 Crescimento Local

Definição: Dizemos que a função f tem um máximo local em $x_0 \in D_f$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Caso $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$, dizemos que f tem um máximo global em x_0. Definições análogas podem ser feitas para mínimo local e global considerando o menor valor de f em lugar do maior valor.

Definição: Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset A.$$

O conjunto de pontos interiores de A é denotado por $\text{int}(A)$ e neste caso, da definição temos imediatamente que $\text{int}(A) \subset A$.

Exemplo: Se $A_1 = [0, 1[$, $A_2 =]0, \infty[$, $A_3 = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{0\}$, então temos $\text{int}(A_1) =]0, 1[$, $\text{int}(A_2) =]0, \infty[$ e $\text{int}(A_3) = \emptyset$

Theorem 6.2.1 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em $x_0 \in int(I)$. Se f atinge um extremo local (máximo ou mínimo local) em x_0, então $f'(x_0) = 0$.*

Proof: Assumiremos que x_0 é ponto onde f atinge um máximo local. Como $x_0 \in \text{int}(I)$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$, logo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[$$
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

portanto tomando limites laterais temos que $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$, portanto $f'(x_0) = 0$. □

Observações:

1. Se $x_0 \in I$ e $x_0 \notin \text{int}(I)$, isto é, se x_0 for um extremo do intervalo I, a conclusão do teorema não vale como ilustra o seguinte exemplo: $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x$, esta função tem um mínimo global em $x = 0$, porém $f'(0) = 1$.

2. O recíproco do teorema anterior não vale, pois $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^3$, satisfaz $f'(0) = 0$, porém f não atinge máximo nem mínimo local em $x_0 = 0$.

Lemma 6.2.2 (Teorema de Rolle) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(a) = f(b)$. Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Proof: Pelo Teorema de Weierstrass sabemos que f atinge seu valor máximo M e mínimo m, se eses valores forem atingidos nos extremos a e b então a função seria constante, logo $f'(x) = 0$ para qualquer $x \in]a, b[$. caso contrário, deverá existir um $x_0 \in]a, b[$ que realiza o máximo ou o mínimo de f logo pelo teorema anterior $f'(x_0) = 0$ □

Theorem 6.2.3 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f dor contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe $x_0 \in]a,b[$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$$

Proof: Consideremos a função auxiliar

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Esta função satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, portanto existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $g'(x_0) = 0$, isto é

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Corollary 6.2.4 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo. Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ então f é constante*

Proof: Seja $x_0 \in I$ fixo. para $x \in I$, f satisfaz as condições do teorema anterior no intervalo fechado de extremos x_0 e x, portanto existe θ_x nesse intervalo tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\theta_x)(x - x_0) = 0,$$

ísto é $f(x) = f(x_0)$ para todo $x \in I$. □

Exemplo: O recíproco do corolário anterior não vale se I não for um intervalo, pois considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 3, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

temos que ela é derivável e $f'(x) = 0$ para todo $x \in]0,1[\cap]1,2[$, porém a função não é constante.

Corollary 6.2.5 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável, onde I é um intervalo, então*

1. *si $f'(x) \geq 0$ pra todo $x \in I$, então f é crescente*
2. *si $f'(x) > 0$ pra todo $x \in I$, então f é estritamente crescente*
3. *si $f'(x) \leq 0$ pra todo $x \in I$, então f é decrescente*
4. *si $f'(x) < 0$ pra todo $x \in I$, então f é estritamente decrescente*

Proof: Mostremos o primeiro item deixando os restantes para o leitor. Sejam $x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

isto é $f(x_1) \leq f(x_2)$, portanto f é crescente. □

Exemplo: consideremos a função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, Como $f'(x) = 6x(x-1)$ temos que $f'(0) = f'(1) = 0$ e $f'(x) > 0$ para $x < 0$ e $x > 1$, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$, logo f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]1, \infty[$ e estritamente decrescente no intervalo $]0,1[$.

Lemma 6.2.6 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em $x_0 \in I$. Logo*

1. *Se $f'(x_0) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in I$ tal que $x_0 < x < x_0 + \delta$.*

2. *Se $f'(x_0) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in I$ tal que $x_0 - \delta < x < x_0$.*

Proof: Provemos o primeiro item deixando a prova do segundo para o leitor. Desde que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$$

então existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

para todo $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$. Em particular, para $x \in I$ tal que $x_0 < x < x_0 + \delta$ temos que

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) > 0.$$

Isto é, $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in I$ tal que $x_0 < x < x_0 + \delta$. $\square$

Theorem 6.2.7 (Darboux) *Se f é derivável em $[a, b]$ então f' asume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.*

Proof: Suponhamos que $f'(a) < f'(b)$ e seja k tal que $f'(a) < k < f'(b)$. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = kx - f(x)$. Desde que g é contínua ela atinge seu valor máximo em $[a, b]$. Como $g'(a) = k - f'(a) > 0$ do lema anterior g não atinge seu máximo em a. Analogamente, como $g'(b) = k - f'(b) < 0$, g não atinge seu máximo em b, logo g atinge seu valor máximo em algum ponto $x_0 \in]a, b[$ e portanto $g'(x_0) = 0$, ou equivalentemente $f'(x_0) = k$. $\square$

6.3 Polinômio de Taylor

Definição: Seja f é uma função definida num intervalo I que contem x_0. Se f é derivável em $I \cap I_{\delta_1}(x_0)$ então f' define uma função em $I \cap I_{\delta_1}(x_0)$. Assim f' for derivável em x_0, sua derivada nesse ponto é chamada de derivada de ordem 2 de f em x_0 e denotada $f''(x_0)$ ou $f^{(2)}(x_0)$. Caso exista f'' num intervalo contendo x_0, $I \cap I_{\delta_2}(x_0)$, e for derivável em x_0, podemos contínuar a definir derivadas de ordem maior. De forma geral podemos definir derivadas de ordem maior da seguinte da forma indutiva: f é n vezes derivável em x_0 se existe $f^{(n-1)}$ em algum intervalo $I \cap I_{\delta_n}(x_0)$ e for derivável em x_0, e neste caso a derivada de f de ordem n em x_0 é denotada por $f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0)$.

Polinômios de Taylor: Se uma função f é derivável no ponto x_0 podemos concluir que

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx f'(x_0), \quad \textit{quando} \quad h \approx 0$$

ísto é,

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \textit{quando} \quad h \approx 0,$$

isto significa que a função $h \mapsto f(x_0+h)$ pode ser aproximada por um polinômio de ordem 1 quando $h \approx 0$. Veremos que quando f tem derivadas de ordem maior a função $h \mapsto f(x_0+h)$ poderá ser aproximada por polinômios de ordem maior. Vejamos o caso particular quando f já é um polinômio de ordem n. Logo, en torno do ponto x_0, f pode ser escrito da forma:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdot + a_n(x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i.$$

Evidentemente esta função possui derivadas de todas as ordens e desde que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} a_i i(i-1)\cdots(i-k+1)(x-x_0)^{i-k},$$

temos que

$$a_k = f^{(k)}(x_0)/k!, \quad 1 \leq k \leq n,$$

Observe que $a_0 = f(x_0) = f^{(0)}(x_0)/0!$ (aqui, conveniamos que $f^{(0)} := f$ e $0! := 1$), assim a fórmula anterior também vale para $k = 0$. Portanto f pode ser escrito da forma $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Assim se $x = x_0 + h$ temos que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(0)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n,$$

isto é a função $h \mapsto f(x_0+h)$ coincide com o polinômio $p(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$.

Quando f é uma função qualquer, o polinômio anterior não necessáriamente coincide com a função $h \mapsto f(x_0+h)$, porem veremos que, sobe certas condições, ficam bem próximos. Seja f uma função n vezes derivável em x_0, o polinômio de ordem menor ou igual a n, dado por

$$p_f(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n,$$

é chamado de *Polinômio de Taylor* da função f no ponto x_0. Definamos

$$r(h) = f(x_0+h) - p_f(h),$$

logo $p_f(h)$ estará próximo de $f(x_0+h)$ se o *resto* $r(h)$ está próximo de zero.

Theorem 6.3.1 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange) *Se $f : [x_0, x_0+h] \to \mathbb{R}$ é uma função com derivadas contínuas até a ordem n no intervalo $[x_0, x_0+h]$ e existe $f^{(n+1)}$ no intervalo $]x_0, x_0+h[$, então existe $\theta \in]x_0, x_0+h[$ tal que*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Proof: Denotemos como $a = x_0$ e $b = x_0 + h$ e consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{K}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}, \tag{3.1}$$

onde K é uma constante tomada de tal forma que $g(a) = 0$. Como $g(b) = 0$ pelo teorema de Rolle teremos que existe $\theta \in]a, b[$ tal que $g'(\theta) = 0$. Como

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{K}{n!}(b-x)^n$$

para todo $x \in]a, b[$, tomando $x = \theta$ temos que

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(b-\theta)^n = \frac{K}{n!}(b-\theta)^n,$$

isto é $K = f^{(n+1)}(\theta)$. Agora tomando $x = a$ em (3.1), como $g(a) = 0$, o teorema está mostrado. □

Observações:

1. No teorema anterior h foi considerado positivo, porém o teorema contínua valendo se h é negativo, isto é, se f satisfaz as condições do teorema anterior no intervalo $[x_0 - h, x_0]$, como $h > 0$, podemos aplicar o teorema anterior à função $x \mapsto F(x) := f(2x_0 - x)$ no intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

2. Observe que se consideramos o resto $r(h) = f(x_0 + h) - p_f(h)$; do teorema anterior temos que

   $$r(h) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{r(h)}{h^n} = \frac{f^{(n+1)}(\theta_h)}{(n+1)!}h.$$

   Se $h \to 0$ então $\theta_h \to x_0$ e se $f^{(n+1)}$ for contínua em x_0 temos que

   $$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

   Este limite continua valendo mesmo que não exista $f^{(n+1)}$. Isto significa que $p_f(h)$ sempre é uma boa aproximação de $f(x_0 + h)$ quando $h \approx 0$.

Vimos, no Teorema (6.2.1) que se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $x_0 \in \text{int}(I)$ e atinge um extremo local nesse ponto, então $f'(x_0) = 0$ porém o recíproco não vale. Um ponto $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$ é chamado de *ponto crítico* de f.

Theorem 6.3.2 *Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função derivável e $x_0 \in]a, b[$ um ponto crítico desta função. Então*

1. *Se existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ e $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, então x_0 é um ponto de máximo local.*

2. *Se existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ e $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, então x_0 é um ponto de mínimo local.*

Proof: Provemos o primeiro item, o segundo é similar. Como $f'(x) \geq 0$ em $]x_0 - \delta, x_0[$ a função é crescente nesse intervalo e como $f'(x) \leq 0$ em $]x_0, x_0 + \delta[$ a função é decrescente nesse intervalo, logo x_0 é um ponto de máximo local. □

Se consideramos $f(x) = x^3$ e $g(x) = -x^5$, então temos que $x_0 = 0$ é um ponto crítico de ambas funções, porém não é um ponto de máximo nem de mínimo local. Observe que f e g tem a seguinte propriedade em torno deste ponto: para $x \neq 0$ temos que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 > 0, \quad \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -x^4 < 0.$$

Estas propriedades são características dos pontos críticos denominados *de inflexão*, como definimos a seguir.

Definição: Um ponto crítico $x_0 \in]a, b[$ da função $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, é dito um ponto *de inflexão horizontal* se exite $\delta > 0$ tal que

$$\text{ou} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\},$$

$$\text{ou} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}.$$

Exemplo: $x_0 = 0$ é um ponto de inflexão horizontal das funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = -x^5$.

Theorem 6.3.3 *Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas contínuas ate a ordem $n \geq 2$ e seja $x_0 \in]a, b[$ tal que*

$$f'(x_0) = 0, \ f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Então temos os seguintes resultados

1. *Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$ então x_0 é um ponto de máximo local*
2. *Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$ então x_0 é um ponto de mínimo local*
3. *Se n é impar então x_0 é um ponto de inflexão horizontal*

Proof: Aplicando a Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange no ponto x_0 e em vista das hipóteses, temos que para $x \in]a, b[$ existe θ_x no intervalo de extremos x_0 e x tal que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\theta_x)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{3.2}$$

Item 1: Se $f^{(n)}(x_0) < 0$, pelo fato de $f^{(n)}$ ser contínua em $]a, b[$ existirá $\delta > 0$ tal que $f^{(n)}(x) < 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, logo $f^{(n)}(\theta_x) < 0$ quando $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Como n é par, de (3.2) segue que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, portanto x_0 é um ponto onde f atinge um mínimo local. A prova do item 2 e similar ao anterior e fica como exercício. Item 3: Quando n é impar escrevemos (3.2) da seguinte forma

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f^{(n)}(\theta_x)}{n!}(x - x_0)^{n-1}, \tag{3.3}$$

para $x \neq x_0$. Como $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, suponhamos que $f^{(n)}(x_0) > 0$ (o outro caso pode ser tratado de forma similar), então por continuidade de $f^{(n)}$, existe $\delta > 0$ tal que ou $f^{(n)}(x) > 0$ para todo

$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e portanto $f'(\theta_x) > 0$. De (3.3) podemos concluir que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, assim, x_0 é um ponto de inflexão horizontal de f. $\square$

Exemplo: Consideremos a função $f(x) = x^2(x-1)^3$. Então

$$f'(x) \;=\; x(x-1)^2(5x-2),$$

logo os pontos críticos de f são 0, 1 e 2/5. Observe que $f''(x) = (x-1)p(x)$ onde

$$p(x) = (x-1)(5x-2) + 2x(5x-2) + 5x(x-1).$$

Desde que $f''(0) = -p(0) < 0$ temos $x_0 = 0$ é um ponto onde f atinge um máximo local. Como $f''(2/5) = (-3/5)p(2/5) > 0$ então $x_0 = 2/5$ é um ponto onde f atinge um mínimo local. Como $f''(1) = 0$ não podemos afirmar nada, logo calculando a terceira derivada de f temos que

$$f'''(x) \;=\; p(x) + (x-1)p'(x)$$

dai segue que $f'''(1) = p(1) \neq 0$, logo $x_0 = 1$ é um ponto de inflexão horizontal.

6.4 Séries de Potências

Uma série de potências centradas em $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n := a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots , \tag{4.4}$$

onde x é uma variável real e (a_n) é uma seqüencia de numeros reais. Observe que para $x = x_0$ esta série converge logo esta série é uma função S definida em pelo menos $x = x_0$. Se consideremos

$$D_S := \{\xi \in \mathbb{R} : \text{tal que a série (4.4) converge em } x = \xi\},$$

logo

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

é uma função definida em D_S.

Exemplo: Consideremos a série geométrica

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Neste caso a série é centrada em $x_0 = 0$ e $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$. Sabemos que esta série converge para $1/(1-x)$ quando $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Alem disso, pode-se verificar que em $x = \pm 1$ a série não converge, logo $D_S =]-1, 1[$ e

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Theorem 6.4.1 *A série de potências* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *converge absolutamente para os valores* x *tal que* $|x-x_0| < R$ *e diverge quando* $|x-x_0| > R$*, onde* R *é dado por*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Caso este limite seja 0 *atribuímos* $R = \infty$ *e caso o limite seja* ∞ *atribuímos* $R = 0$.

Proof: Usando o teste da raiz a série deve convergir absolutamente nos pontos x onde

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0| < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{R} \cdot |x-x_0| < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-x_0| < R.\end{aligned}$$

Da mesma forma, segundo o teste da raiz, a série diverge nos pontos x tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-x_0| > R.$$

□

Observações:

1. R do teorema anterior é chamado de raio de convergência da série, e o teorema anterior garante que o maior intervalo aberto onde a série converge é $]x_0 - R, x_0 + R[$ o qual é chamado de intervalo de convergência da série. Nos extremos deste intervalo não podemos garantir convergência ou divergência.

2. Quando existe $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ é possível mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Neste caso, temos outra alternativa para calcular o raio de convergência da série, a saber

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Exemplo: Encontremos o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-x_0)^n}{n!}$. Como existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} = 0,$$

Segue que $R = \infty$ e portanto o intervalo de convergência da série é $]-\infty, \infty[$.

Exemplo: Encontremos o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{3^n}.$$

Escrevendo a série anterior da forma $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-5)^m$ encontramos que $a_{2n} = 1/3^n$ e $a_{2n+1} = 0$, logo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

daí $R = \sqrt{3}$, portanto o intervalo de convergência da série é $]5-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}[$.

Theorem 6.4.2 *Consideremos as séries de potências*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Então,

1. *As séries S e L tem o mesmo intervalo de convergência.*
2. *A série S é uma função derivável no seu intervalo de convergência e $S'(x) = L(x)$, isto é, podemos derivar a série termo a termo.*

Proof: Sejam R e $\hat{R}$ os raios de convergência das séries S e L respectivamente. Como

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n (x - x_0)^n,$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{R}} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = 1 \cdot \frac{1}{R} \end{aligned}$$

então $\hat{R} = R$. Vejamos agora que S é derivável e $S'(x) = L(x)$ em $]x_0 - R, x_0 + R[$. Sem perda de generalidade assumiremos que $x_0 = 0$, neste caso

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{para todo} \quad x \in]-R, R[.$$

Observe que

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{(x+h)^n - x^n - n x^{n-1} h}{h} \right],$$

porém, da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, temos que

$$(x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} (x + \theta h)^{n-2} h^2,$$

para algum $\theta \in]0,1[$. Substituindo na equação anterior e tomando valor absoluto teremos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - L(x) \right| &\leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| |x + \theta h|^{n-2} \\ &\leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|x| + |h|)^{n-2}. \end{aligned}$$

Assim fixando $\delta > 0$ tal que $|x| + \delta < R$ temos que, para $|h| \leq \delta$,

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - L(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|x| + \delta)^{n-2}.$$

Logo tomando limite quando $h \to 0$ temos o resultado desejado, isto é, S é derivável e $S'(x) = L(x)$ para todo $|x| < R$. $\square$

Observação: Como consequência do teorema anterior, temos que a série se potências $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ é uma função infinitamente derivável no seu intervalo de convergência $]x_0 - R, x_0 + R[$. Como

$$S^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$

temos que

$$S^{(k)}(x_0) = k!a_k \quad \text{e portanto} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Daqui, podemos concluir que, se $S^{(n)}(x_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $S \equiv 0$ em $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Exemplo: Vejamos que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ para todo $x \in]-1, 1[$. De fato, primeiro observe que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'.$$

Como a função

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[,$$

é derivável em $]-1, 1[$, derivando ambos membros temos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Exemplo: Consideremos as séries de potências

$$e(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad c(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Pode-se verificar que o intervalo de convergência de cada uma destas séries é todo $]-\infty, \infty[$, além disso,

$$\begin{aligned} e'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e(x), \\ c'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} = -s(x), \end{aligned}$$

ísto é $e'(x) = e(x)$ e $c'(x) = -s(x)$, analogamente verifica-se que $s'(x) = c(x)$. Pode-se provar que estas séries de potências coincidem com as funções exponencial, coseno e seno respectivamente, oque pode ser utilizado para redefinir ou definir estas funções elementares, isto é, poderíamos ter definido:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

e consequentemente poderíamos afirmar que estas funções são deriváveis em $]-\infty, \infty[$ e $\exp'(x) = \exp(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$. Usando esta definição ainda podemos recuperar uma série de propriedades destas funções como veremos nos próximos exemplos.

Exemplo: Vejamos que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. De fato, da fórmula do binômio de Newton temos que

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{n! x^i y^{n-i}}{i!(n-i)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \right)$$

porém, a última série é a resultante do produto das séries $\exp(x)$ e $\exp(y)$, logo $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Exemplo: Vejamos que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$. De fato, como

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n-1}.$$

para $x \neq 0$, com $|x| < 1$, temos que

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq 1 + |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Fazendo $x \to 0$ segue o resultado desejado.

Exemplo: Encontremos uma função $y(x)$ que seja solução do *problema de valor inicial*

$$y'' - 2xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

Procuremos uma solução da forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Logo $a_0 = y(0) = 1$ e $a_1 = y'(0) = 0$ e também

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

mudando os índices da primeira série de $n-2$ para n temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

logo

$$2a_2 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+1) a_n] x^n = 0,$$

portanto, $a_2 = a_0 = 1$ e

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}, \quad \forall n \geq 1,$$

assim, como $a_1 = 0$ temos que $a_{2m+1} = 0$ para todo $m \geq 0$ e

$$a_{2m} = \frac{a_0}{m!} = \frac{1}{m!}, \quad \forall m \geq 0.$$

Portanto

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2)^m}{m!} = \exp(x^2).$$

6.5 Série de Taylor e Funções Analíticas

Definição: Dizemos que uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é analítica em $x_0 \in D_f$ se D_f contém um intervalinho $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\delta > 0$, e uma sequência (a_n) satisfazendo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{para todo} \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Observação: Note que, desta definição, a função f e infinitamente derivável no intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Portanto f é analítica em x_0 se e somente se coincide localmente com sua *série de Taylor centrada em* x_0 definida por:

$$S_f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Seja f uma função infinitamente derivável. Suponhamos que $R > 0$ seja o raio de convergência da série de Taylor centrada em $x_0 \in I$ associada a esta função, logo a série converge em $]x_0 - R, x_0 + R[$. Pode-se verificar rapidamente que f e sua série de Taylor coincidem em x_0, isto é, $f(x_0) = S_f(x_0)$. Neste cabe o seguinte questionamento: será que f e sua série de Taylor S_f coincidem em algum intervalinho contendo x_0? em caso positivo a função seria analítica em x_0. Vejamos alguns exemplos que nos permitam ter uma ideia em alguns casos particulares.

Exemplo: Seja $f :]-\infty, 1/2[\to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = 1/(1 - x)$ então

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$$

dai segue que $f^{(n)}(0) = n!$, dai temos que sua série de Taylor centrada em $x_0 = 0$ é

$$S_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Sabemos que o intervalo de convergência desta série é $]-1, 1[$ e converge para $1/(1 - x)$.Assim, a função e sua série de Taylor coincidem no intervalo $]-\infty, 1/2[\cap]-1, 1[=]-1, 1/2[$.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, então percebemos claramente que é infinitamente derivável em qualquer $x \neq 0$. esta função também é derivável em zero, pois

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0 = f'(0).$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que existem as derivadas de maior ordem em zero e que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o qual é consequência de que

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{p(x)} = 0,$$

para todo polinômio p. Por tanto sua série de Taylor em torno de $x = 0$ é a função identicamente nula, a qual não coincide com $f(x)$ em nenhum ponto $x \neq 0$. Isto significa que esta função não é analítica em $x = 0$, embora seja infinitamente derivável nesse ponto

Theorem 6.5.1 (Condição necessária e suficiente para analiticidade) *Seja f uma função infinitamente derivável me algum intervalo aberto contendo x_0. Então f é analítica en x_0, se e somente se, existe $r > 0$ tal que para $M_n = M_n(r) = \max\{|f^{(n)}(x)| : x \in [x_0 - r, x_0 + r]\}$ temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n r^n}{n!} = 0.$$

Neste caso,

$$f(x) = S_f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Proof: $(\Rightarrow)$: Sejam r e ρ tal que $0 < r < \rho < R$, como $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k < \infty$ temos que $|a_k|\rho^k \leq C$ para todo $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Agora consideremos x tal que $|x - x_0| < r$, assim

$$|f^{(n)}(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!|a_k|r^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{1}{\rho^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!|a_k|\rho^k}{(k-n)!} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-n} \leq \frac{C}{\rho^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-n}.$$

Por outro lado, sabemos que para $|y| < 1$ vale

$$\frac{1}{(1-y)} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \quad \Rightarrow \quad \frac{n!}{(1-y)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k! y^{k-n}}{(k-n)!},$$

logo, tomando $y = r/\rho$ temos que

$$M_n \leq \frac{C}{\rho^n} \frac{n!\rho^{n+1}}{(\rho - r)^{n+1}}.$$

Portanto

$$\frac{M_n(r) r^n}{n!} \leq \frac{C\rho}{\rho - r} \left(\frac{r}{\rho - r}\right)^n,$$

Neste ponto, se redefinimos r tal que $r < \rho/2$, segue que $\frac{r}{\rho - r} < 1$ e portanto

$$\left(\frac{r}{\rho - r}\right)^n \to 0$$

de onde segue o resultado de desejado.
$(\Leftarrow)$: Seja $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para algum ξ no intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$. Logo

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M_{n+1}(r) r^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

Dai segue o resultado desejado. $\square$

Observação: Note que para $r > 0$ fixo tem-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$. De fato, aplicando o teste da razão à série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0.$$

Logo a série converge e portanto seu termo geral se aproxima de zero. Tendo em conta esta observação, se (M_n) do teorema anterior for uma sequência limitada, teremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n r^n}{n!} = 0.$$

Exemplo: A série de Taylor de $f(x) = \exp(x)$ em torno de $x = 0$ é

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

note que para qualquer $r > 0$ fixo teremos que $M_n = \{|f^{(n)}(x)| : x \in [-r, r]\} = \exp(r)$ e portanto $\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(r)r^n}{n!} = 0$, logo pelo teorema anterior

$$\exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo} \quad x \in [-r, r].$$

Como r é arbitrário, esta igualdade é válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Estas representações das funções como série de potências nosa permite obter ou recuperar algumas propriedades da função, por exemplo $\exp(0) = 1$, $\exp'(x) = \exp(x)$ (mostrado no exemplo ?), ou ate

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

De fato, para y fixo consideremos a função $f(x) = \exp(x+y)$. Usando o teorema ? pode-se mostrar que f e sua série de Taylor coincidem em $\mathbb{R}$ e como $f^{(n)}(0) = \exp(y)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, temos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(y)}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \exp(y) = \exp(x)\exp(y),$$

como y é arbitrário, segue o resultado desejado.

Exemplo: A série de taylor de $f(x) = \cos(x)$ em torno de $x = 0$ é

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m},$$

pois $\cos^{(2m)}(0) = (-1)^m$ e $\cos^{(2m+1)}(0) = 0$. Desde que, para cada $r > 0$, $M_n = \sup\{|f^{(n)}(x) : x \in [-r, r]\} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n r^n}{n!} = 0,$$

e portanto, do Teorema ? segue que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{para todo} \quad x \in [-r, r].$$

Como r é arbitrário a igualdade acima vale para todo $x \in \mathbb{R}$. Analogamente, encontramos que

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Mostremos que

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

De fato, para cada $y \in \mathbb{R}$ fixo consideramos a função $f(x) = \cos(x+y)$. Verificamos rapidamente que $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x+y)$ e $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin(x+y)$, assim para cada $r > 0$ temos que $M_n = \max\{|f^n(x)| : x \in [-r, r]\} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, portanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_n r^n}{n!} = 0$$

logo, pelo teorema anterior

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(y)}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(y)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{para todo} \quad x \in [-r, r].$$

A igualdade ainda é válida para todo $x \in \mathbb{R}$, pois r é arbitrário. Assim,

$$f(x) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

6.6 Exercícios

1. Assuma que a função $\exp(x) = e^x$ é derivável em $x = 0$ e que $\exp'(0) = 1$. Mostre que:

   (a) A função exp é derivável em qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $\exp'(x) = \exp(x)$.

   (b) A função ln é derivável em $]0, \infty[$ e $\ln(x) = 1/x$.

   (c) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = x^\alpha$ é derivável em $]0, \infty[$ e $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Dica: $x = \exp(\ln(x))$

   (d) Mostre que as funções sinh e cosh são deriváveis em $]-\infty, \infty[$ e que $\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$.

2. Seja $p > 1$. Mostre que as funções $f(x) = |x|^{p-1}x$ e $g(x) = |x|^p$ são deriváveis em $]-\infty, \infty[$ e que $f'(x) = p|x|^{p-1}$, $g'(x) = p|x|^{p-2}x$. Se $0 \leq p \leq 1$ a função g é derivável em $x_0 = 0$? Justifique sua resposta.

3. Sejam I, J intervalos abertos e $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções tal que f e $g \circ f$ são deriváveis em $x_0 \in I$. Suponha que f é injetiva com inversa contínua e $f'(x_0) \neq 0$. Mostre que g é derivável em $y_0 = f(x_0)$, além disso
$$g'(y_0) = \frac{(g \circ f)'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0 tal que $f(x_0) = 0 = f'(x_0)$. Mostre que $g(x) := |f(x)|$ é derivável em x_0.

5. Asumamos que as funções trigonométricas $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são deriváveis e que $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

   (a) Mostre que a função $\tan(x)$ é derivável em $]-\pi/2, \pi/2[$ e encontre a sua derivada.

   (b) Se consideramos a função $\sin(x)$ restrita ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$, mostre que sua função inversa $\arcsin(x)$ é derivável e encontre sua derivada.

   (c) Considere a função $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que f é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$, porém sua derivada f' não é limitada em $[-1, 1]$.

   (d) Mostre que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dica: derive a função $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Mostre que, se f for par, isto é, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f' é uma função ímpar, isto é, $f'(-x) = -f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que, entre duas raízes da equação $f(x) = c$ existe uma raiz da equação $f'(x) = 0$.

8. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se f' for uma função limitada, mostre que f é lipschitziana. As funções lipschitzianas são deriváveis? Justifique sua resposta.

9. A função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita holderiana de ordem $\alpha > 0$ se existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ para todo $x, y \in I$. Mostre que, se $\alpha > 1$ então f é constante.

10. Seja $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$. Se existe $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \beta$, mostre que $\beta = 0$. Dica: Aplique o teorema do valor médio no intervalo $[x, x + 1]$.

11. [$\star$] Seja $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f'(x) \to \alpha$ quando $x \to \infty$. Mostre que $\dfrac{f(x)}{x} \to \alpha$, quando $x \to \infty$. Use este fato para mostrar que $\dfrac{\ln(x)}{x} \to 0$ quando $x \to \infty$.

12. Use o teorema do valor meio para mostrar que $(x-1)/x < \ln(x) < x-1$ para todo $x > 1$.

13. Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Mostre que, se existe $\lim_{x\to a} f'(x) = L$, então f é derivável em a e $f'(a) = L$.

14. Sejam $\alpha \leq \beta$. Encontre os extremos locais da função

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2}x^2 + \alpha\beta x + 1,$$

discriminando o tipo (máximo ou mínimo local). f tem algum ponto de inflexão? Desenhe o gráfico da função f.

15. Seja $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) > 0$ em $[0,1]$ e $g(x) < 0$ em $]1,2]$. Mostre que não existe f derivável em $[0,2]$ tal que $f' = g$.

16. [Regra de L'Hospital - 1] Seja x_0 um ponto do intervalo I, considere $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ duas funções derívaveis tal que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Suponhamos que existem os limites finitos

$$\lim_{x\to x_0} f'(x), \quad \lim_{x\to x_0} g'(x) \neq 0,$$

mostre que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dica: Considere as extensões $\hat{f}, \hat{g} : I \to \mathbb{R}$ das funções f e g, definindo $\hat{f}(x_0) = 0 = \hat{g}(x_0)$ e aplique o teorema do valor médio no intervalo de extremos x e x_0.

17. [Regra de L'Hospital - 2] Suponha que f e g são funções n vezes deriváveis num intervalo aberto contendo x_0 tal que

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Suponhamos que existem os limites finitos

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(x), \quad \lim_{x\to x_0} g^{(n)}(x) \neq 0,$$

mostre que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

18. Calcule os seguintes limites, justificando sua resposta.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

19. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(x)/x$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 1$, é derivável no ponto $x_0 = 0$.

20. Considere p_f o polinômio de taylor de grau n da função f no ponto x_0. Considere $r(h) = f(x_0+h) - p_f(h)$. Usando a regra de L'Hospital, mostre que $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$ quando $f(x) = e^x$.

21. Sejam $f,\ g$ duas funções n vezes deriváveis em x_0 mostre usando indução que

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x_0) g^{(n-i)}(x_0) \quad \text{onde} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!\ i!}$$

22. Seja f uma função derivável em I tal que existe a segunda derivada em $x_0 \in I$. Mostre que

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$

Dê um exemplo de que este limite pode existir sem necessidade que exista $f''(x_0)$.

23. Seja $p > 0$, considere a função $f(x) = x^p - 1 - (x-1)^p$ para $x \geq 1$.

   (a) Mostre que f é crescente quando $p > 1$ e é decrescente quando $0 < p < 1$.

   (b) Sejam $0 < a < b$. mostre que $(b-a)^p \leq b^p - a^p$ quando $p > 1$, e $(b-a)^p \geq b^p - a^p$ quando $0 < p < 1$.

24. Seja $a \in \mathbb{R}$. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries

$$(b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n; \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}(x+2)^n; \quad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a^n}(3x-1)^n; \quad (e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

25. Mostre que o raio de convergência das seguintes séries de potências é 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{n(n+1)}.$$

Seguidamente, estude a convergência desas séries nos pontos $x = 1, -1$.

26. Considere $\exp(x)$ definida por sua série de potências. Mostre que existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tal que

$$|\exp(x) - 1 - x| \leq Mx^2, \quad \forall x \in]-\delta, \delta[.$$

27. Usando a definição de funções por série de potências, mostre que

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

   (b) $\sin(-x) = -\sin(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

28. Obtenha a série de Taylor em torno de $x_0 = 1$ do polinômio $p(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0$.

29. Mostre que a função $f(x) = \ln(x)$ coincide com sua série de Taylor em torno de $x_0 = 1$ no intervalo $]0, 2[$. Elas coincidem em $[2, \infty[$? Justifique sua resposta.

30. Usando a representação de funções pelas suas Séries de Taylor Mostre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

31. Usando a representação de funções pelas suas séries de Taylor Mostre que

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 7

Integral de Riemann

7.1 Integrabilidade de funções limitadas

Uma partição P do intervalo $[a,b]$ é um subconjunto finito de pontos desse intervalo, ordenados de forma crescente onde os extremos formam o primeiro e o último ponto respectivamente, isto é, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Dada uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ usaremos as seguintes notações para o ínfimo e supremo desta função no intervalo $[a,b]$:

$$m(f) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M(f) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Para o ínfimo e supremo da função no subintervalo $[x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$, $1 \leq i \leq n$, usaremos as notações

$$m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i(f) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Estas constantes, uma vez que a função é pre establecida, serão denotadas simplesmente por m, M, m_i e M_i.

A soma inferior de f en relação à partição P será o valor

$$\underline{s}(f,P) = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

e a soma superior de f en relação à partição P será o valor

$$\overline{s}(f,P) = \sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

Observe que

$$m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$ segue dai que

$$m(b-a) \leq \underline{s}(f,P) \leq \overline{s}(f,P) \leq M(b-a) \tag{1.1}$$

para qualquer partição P do intervalo $[a,b]$.

Definição: Sejam P e Q duas partições do intervalo $[a,b]$. dizemos que Q é um refinamento de P se $P \subset Q$.

Theorem 7.1.1 *Seja Q um refinamento de partição P do intervalo $[a, b]$, então*

$$\underline{s}(f, P) \leq \underline{s}(f, Q) \quad e \quad \overline{s}(f, P) \geq \overline{s}(f, Q)$$

Proof: Sem perda de generalidade, suponhamos que Q tem somente um ponto a mais que P, o caso geral é obtido aplicando este procedimento um número finito de vezes. Assim, se $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ temos que $Q = \{x_0, \ldots, x_{j-1}, \xi, x_j, \ldots, x_n\}$. Se denotamos com

$$m_{j,1} = \sup_{[x_{j-1},\xi]} f(x), \quad m_{j,2} = \sup_{[\xi,x_j]} f(x),$$

temos que $m_j \leq m_{j,1}$ e $m_j \leq m_{j,2}$, logo

$$m_j(x_j - x_{j-1}) = m_j(\xi - x_{j-1}) + m_j(x_j - \xi) \leq m_{j,1}(\xi - x_{j-1}) + m_{j,2}(x_j - \xi),$$

e portanto $\underline{s}(f, P) \leq \underline{s}(f, Q)$. O mesmo raciocínio pode ser usado com somas superiores, portanto o teorema está provado. □

Theorem 7.1.2 *Sejam P e Q duas partições do intervalo $[a, b]$, então*

$$\underline{s}(f, P) \leq \overline{s}(f, Q)$$

Proof: Claramente $P \cup Q$ é uma refinamento de P e Q, logo, pelo teorema anterior temos que

$$\underline{s}(f, P) \leq \underline{s}(f, P \cup Q) \leq \overline{s}(f, P \cup Q) \leq \overline{s}(f, Q).$$

□

Do teorema anterior podemos concluir que qualquer soma superior é uma cota superior do conjunto de somas inferiores e qualquer soma inferior é uma cota inferior do conjunto de somas superiores. consideremos $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as partições do intervalo $[a, b]$, definimos

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx := \sup\{\underline{s}(f, P) : P \in \mathcal{P}\}, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\, dx := \inf\{\overline{s}(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$$

as quais são camadas será chamadas, respectivamente, de integral inferior e superior da função f no intervalo $[a, b]$. Do teorema anterior podemos concluir que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Definição: Dizemos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-Integrável (no intervalo $[a, b]$) se for limitada e

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Neste caso, o valor

$$\int_a^b f(x)\, dx := \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

é chamado de *integral de Riemann da função f no intervalo* $[a, b]$.

Adotaremos as seguinte notação:

$$\mathcal{R}(a, b) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ é Riemann integrável}\}.$$

Exemplo: A função constante $f(x) = k$ é integravel no intervalo $[a, b]$, pois para qualquer partição $P = \{x_0, \cdot, x_n\}$ deste intervalo, temos que

$$\underline{s}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(b - a) = \overline{s}(f, P)$$

portanto $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = k(b - a) = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$, logo esta função é integrável no intervalo $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\, dx = k(b - a)$.

Exemplo: Nem toda função limitada é integrável. Para ilustrar esta afirmação consideremos $a < b$ e a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ e $f(x) = 0$ se $x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}$. logo o ínfimo de f em qualquer subintervalo de $[a, b]$ é 0 e o supremo é 1, logo $\underline{s}(f, P) = 0$, $\overline{s}(f, P) = b - a$ para qualquer partição P de $[a, b]$, logo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = b - a$$

portanto esta função não é integrável.

Theorem 7.1.3 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável se e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existe uma partição $P = P(\epsilon)$ do intervalo $[a, b]$ tal que*

$$\overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) < \epsilon.$$

Proof: ($\Rightarrow$): Seja $\epsilon > 0$. Por $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ ser o ínfimo das somas superiores temos que existe partição P de $[a, b]$ tal que

$$\overline{s}(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Analogamente, por $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$ ser o supremo das somas inferiores temos que existe partição Q de $[a, b]$ tal que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \frac{\epsilon}{2} < \underline{s}(f, Q)$$

Sendo que $P \cup Q$ é um refinamento de P e Q temos que

$$\overline{s}(f, P \cup Q) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \frac{\epsilon}{2} < \underline{s}(f, P \cup Q)$$

e portanto

$$\overline{s}(f, P \cup Q) - \underline{s}(f, P \cup Q) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon.$$

Como a função é integrável temos que $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, dai segue que

$$\overline{s}(f, P \cup Q) - \underline{s}(f, P \cup Q) < \epsilon.$$

($\Leftarrow$): Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Mostraremos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \epsilon.$$

De fato, como existe uma partição P do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) < \epsilon,$$

temos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) < \epsilon.$$

□

Observações:

1. O teorema anterior é util para determinar quando uma função é integrável, porém não determina o valor da integral.

2. Se introduzimos a oscilação de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ dada por

$$\omega_i(f) = M_i(f) - m_i(f),$$

o qual será denotada simplesmente por ω_i, temos que $\overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1})$, assim podemos reformular a conclusão do teorema anterior, colocando-a da seguinte forma: f é integrável em $[a, b]$ se, para $\epsilon > 0$ dado é possível encontrar uma partição P do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \epsilon.$$

Exemplo: A função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é integrável. De fato, fixamos $\epsilon > 0$. Para uma partição qualquer $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ temos que $\omega_i = x_i - x_{i-1}$, assim escolhemos P de tal forma que $x_i - x_{i-1} < \epsilon/(b - a)$, assim $\omega_i < \epsilon/(b - a)$, logo

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \epsilon.$$

Theorem 7.1.4 *Toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona é integrável*

Proof: Para fixar idéias suponhamos que f é não decrescente, logo $f(x) \leq f(y)$ para $x < y$. Observe que $f(a) = f(b)$ então a função é constante e portanto integrável portanto vejamos o caso em que $f(a) < f(b)$. Seja $\epsilon > 0$, consideremos uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $x_i - x_{i-1} < \epsilon/(f(b) - f(a))$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \end{aligned}$$

como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1}] = f(b) - f(a)$ segue que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \epsilon$ □

Theorem 7.1.5 *Toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é integrável*

Proof: Seja $\epsilon > 0$. Pelo fato de f ser contínua e $[a, b]$ ser um intervalo fechado e limitado, f é uniformemente contínua, isto é, existe $\delta > 0$ tal que se $|x-y| < \delta$ então $|f(x)-f(y)| \leq \epsilon/(b-a)$. Consideremos uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $x_i - x_{i-1} < \delta$. Observe que $M_i = f(\beta_i)$ e $m_i = f(\alpha_i)$ para algum $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Portanto $w_i = M_i - m_i = f(\beta_i) - f(\alpha_i) < \epsilon/(b-a)$. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = \epsilon$$

□

Theorem 7.1.6 *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas e c uma constante real. Logo, se f e g são integráveis, então*

1. *$f + g$ é integrável e* $\displaystyle\int_a^b [f+g](x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$
2. *cf é integrável e* $\displaystyle\int_a^b [cf](x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx.$
3. *$f \cdot g$ é integrável.*

Proof: Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partição do intervalo $[a, b]$.
Item 1. Desde que

$$m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f + g)$$

tem-se que

$$\underline{s}(f, P) + \underline{s}(g, P) \leq \underline{s}(f + g, P).$$

Da primeira desigualdade concluimos que

$$\underline{s}(f,P)+\underline{s}(g,P)\leq \underline{\int_a^b}[f+g](x)\,dx$$

qualquer que seja a partição P do intervalo $[a,b]$. Sejam Q e R duas partições de $[a,b]$ então

$$\underline{s}(f,Q)+\underline{s}(g,R)\leq \underline{s}(f,Q\cup R)+\underline{s}(g,Q\cup R)\leq \underline{\int_a^b}[f+g](x)\,dx$$

Fixando uma partição R qualquer, temos que

$$\underline{s}(f,Q)\leq \underline{\int_a^b}[f+g](x)\,dx-s(g,R)$$

para toda partição Q do intervalo $[a,b]$, portanto

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq \underline{\int_a^b}[f+g](x)\,dx-s(g,R).$$

Desta relação segue que

$$\underline{s}(g,R)\leq \underline{\int_a^b}[f+g](x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

para toda partição R do intervalo $[a,b]$. Assim

$$\int_a^b g(x)\,dx\leq \underline{\int_a^b}[f+g](x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

ou equivalentemente

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\leq \underline{\int_a^b}[f+g](x)\,dx.$$

Analogamente prova-se que

$$\overline{\int_a^b}[f+g](x)\,dx\leq \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.$$

Destas duas ultimas desigualdades concluimos que

$$\underline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx=\overline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx.$$

isto é, $f+g$ é integrável e

$$\int_a^b [f+g](x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.$$

Item 2. Consideremos o caso $c \geq 0$ logo $m_i(cf) = cm_i(f)$ de onde segue que $\underline{s}(cf, P) = c\underline{s}(f, P)$ de onde concluimos que

$$\underline{\int_a^b} [cf](x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

Analogamente, conclui-se que

$$\overline{\int_a^b} [cf](x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx,$$

de onde segue nossa conclusão. Agora, para $c < 0$ temos que $m_i(cf) = cM_i(f)$ e $M_i(cf) = cm_i(f)$. portanto

$$\underline{s}(cf, P) = c\overline{s}(f, P) \quad \text{e} \quad \overline{s}(cf, P) = c\underline{s}(f, P)$$

Da primeira desigualdade temos que

$$\underline{\int_a^b} [cf](x)\, dx \geq c\overline{s}(f, P) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\underline{\int_a^b} [cf](x)\, dx \leq \overline{s}(f, P),$$

para tod a partição P de $[a, b]$, de onde segue que

$$\frac{1}{c}\underline{\int_a^b} [cf](x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} [cf](x)\, dx \geq c \int_a^b f(x)\, dx.$$

Analogamente, usando a segunda igualdade em ? temos que

$$\overline{\int_a^b} [cf](x)\, dx \leq c \int_a^b f(x)\, dx.$$

Portanto

$$c \int_a^b f(x)\, dx \leq \underline{\int_a^b} [cf](x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} [cf](x)\, dx \leq c \int_a^b f(x)\, dx,$$

Assim cf é integrável e

$$\int_a^b [cf](x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

Item 3. Consideremos primeiro, o caso em que f e g são funções positivas, então

$$m_i(f)m_i(g) \leq m_i(fg) \leq M_i(fg) \leq M_i(f)M_i(g)$$

portanto

$$\omega_i(fg) = M_i(fg) - m_i(fg) \leq M_i(f)M_i(g) - m_i(f)m_i(g)$$

introducindo o termo $\pm m_i(f)M_i(g)$ e agrupando temos que

$$\omega_i(fg) \leq [M_i(f) - m_i(f)]M_i(g) + m_i(f)[M_i(g) - m_i(g)]$$

logo, considerando que $M(f)$ e $M(g)$ denotam os supremo de f e g em todo o intercalo $[a,b]$ temos que

$$\omega_i(fg) \leq M(g)\omega_i(f) + M(f)\omega_i(g). \tag{1.2}$$

Como f e g são integráveis, para $\epsilon > 0$ encontramos uma partição $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$, ou um refinamento da mesma, tal que simultaneamente se tenha

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2M(g)} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2M(f)}.$$

Assim da desigualdades e (1.2) temos que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(fg)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon.$$

Logo fg é integrável. Provemos agora o caso geral, isto é f e g funções limitadas integráveis quaisquer. Pelo fato dessas funções serem limitadas inferiormente, existe uma constante c tal que $f(x) > c$ e $g(x) > c$ para todo $x \in [a,b]$, logo $f - c$ e $g - c$ são funções positivas e integráveis e como

$$fg = (f-c)(g-c) + c(f+g) - c^2,$$

dos itens anteriores temos que fg é integrável. □

Exemplo: se f e g são integráveis então f^2 e $f - g$ e são integráveis e

$$\int_a^b [f-g](x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx.$$

Consideremos

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$$

Observe que

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

Theorem 7.1.7 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se f é integrável então f^+, f^- e $|f|$ são integráveis no intervalo $[a,b]$*

Proof: Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$, mostremos que $\omega_i(f^+) \leq \omega_i(f)$ para cada $i = 1, \ldots, n$.
Caso 1: suponhamos que existe $x \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(x) > 0$, então $M_i(f) = M_i(f^+)$ (Prove!), como $m_i(f) \leq m_i(f^+)$, temos que

$$\omega_i(f^+) = M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f) = \omega_i(f).$$

Caso 2: suponhamos que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$, neste caso $f^+ \equiv 0$ nesse intervalo, portanto $M_i(f^+) = m_i(f^+) = 0$, logo fica evidente que $\omega_i(f^+) \leq \omega_i(f)$.

A integrabilidade de f^- e $|f|$ decorrem das relações

$$f^- = f^+ - f, \quad |f| = f^+ + f^-$$

□

Exemplo: A integrabilidade de $|f|$ não garante integrabilidade de f. De fato, seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $f(x) = -1$ se $x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$, então $|f| = 1$ a qual é integrável, porém f não é integrável.

Theorem 7.1.8 *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis, logo*

1. *Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.*

2. *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.*

Proof: Asumindo a hipótese do primero item, seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ logo $m_i \geq 0$, portanto $\underline{s}(f,P) \geq 0$. Como f é integrável a sua integral é o supremo das somas inferiores assim temos que

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

O segundo item é consequência de primeiro, para isto basta considerar a função $h = g - f$. Da hipotese tem-se que $h(x) \geq 0$ logo $\displaystyle\int_a^b h(x)\, dx \geq 0$. isto é

$$\int_a^b [g-f](x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

□

Corollary 7.1.9 *Aeja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, então*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Proof: Segue do teorema anterior e da desigualdade $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$. □

7.2 Integração em subintervalos

Theorem 7.2.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $[\alpha, \beta]$ um subintervalo de $[a,b]$ então f é integrável em $[\alpha, \beta]$.*

Proof: Seja $\epsilon > 0$, pelo fato de f ser integrável em $[a,b]$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que

$$\overline{s}(f,P) - \underline{s}(f,P) < \epsilon.$$

Consideremos $Q = P \cup \{\alpha, \beta\}$, logo Q é um refinamento de P logo $\overline{s}(f,Q) \leq \overline{s}(f,P)$ e $\underline{s}(f,P) \leq \underline{s}(f,Q)$ portanto $\overline{s}(f,Q) - \underline{s}(f,Q) \leq \overline{s}(f,P) - \underline{s}(f,P)$, logo

$$\overline{s}(f,Q) - \underline{s}(f,Q) < \epsilon.$$

ordenando de forma crescente os pontos de $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a desigualdade anterior pode ser escrita como

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \epsilon.$$

como $\alpha, \beta \in Q$ temos que $\alpha = x_{i_1}$ e $\beta = x_{i_2}$ com $0 \leq i_1 < i_2 \leq n$, assim $R = \{x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2}\}$ é uma partição de $[\alpha, \beta]$ e

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} \omega_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=0}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \epsilon.$$

portanto f é integrável em $[\alpha, \beta]$. □

Theorem 7.2.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e $c \in]a,b[$. Se f é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ então f é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Proof: Sejam P_1 e P_2 partições de $[a,c]$ e $[c,b]$ respectivamente, então $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a,b]$ alem disso

$$\underline{s}(f, P_1) + \underline{s}(f, P_2) = \underline{s}(f, P)$$

portanto

$$\underline{s}(f, P_1) + \underline{s}(f, P_2) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Fixando P_2 temos que

$$\underline{s}(f, P_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{s}(f, P_2)$$

para toda partição P_1 de $[a,c]$, portanto

$$\int_a^c f(x)\, dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{s}(f, P_2)$$

daqui segue que

$$\underline{s}(f, P_2) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx$$

para toda partição P_2 de $[c,b]$, portanto

$$\int_c^b f(x)\, dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx$$

isto é

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Analogamente, trabalhando com as somas superiores em lugar das somas inferiores temos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

dai segue que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$\square$

Exemplo: A função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \cos(x)$ se $x \in [-1,0]$, e $f(x) = 3$ se $x \in]0,1]$, é integrável pois as restrições desta função aos intervalos $[-1,0]$, $[0,1]$ são integráveis.

Vejamos que $f\big|_{[0,1]}$ é integrável. De fato, seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[0,1]$, logo

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)(x_i - x_{i-1}) = 3x_1$$

Assim, para $\epsilon > 0$ dado escolhemos P tal que $3x_1 < \epsilon$, logo temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon.$$

Portanto $f\big|_{[0,1]}$ é integrável em $[0,1]$.

Definição: Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se dado $\epsilon > 0$ é possível encontrar uma coleção enumerável de intervalos abertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$$

onde $|I_n|$ é o comprimento do intervalo I_n.

Exemplo: Um conjunto enumerável $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tem medida nula, pois para $\epsilon > 0$ dado, escolhemos os intervalos

$$I_n = \left]x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right[, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Claramente $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Theorem 7.2.3 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então f é integrável se e somente se o conjunto de discontinuidades de f tem medida nula*

Proof: ($\Leftarrow$): Seja D o conjunto de discontinuidades de f. Seja $\epsilon > 0$ como D tem medida nula existem intervalos abertos (I_n) tal que $D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon/2\omega$ onde $\omega = M - m$. Para cada $x \in C = [a,b] \setminus D$ (ponto de continuidade), escolhemos um intervalo aberto J_x contendo x tal que $M(f, \bar{J}_x) - m(f, \bar{J}_x) < \epsilon/2(b-a)$. logo

$$[a,b] \subset \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right] \bigcup \left[\bigcup_{x \in C} J_x\right]$$

Por $[a,b]$ ser compacto, podemos extrair uma subcovertura finita $I_{n_1}, \ldots, I_{n_r}$ e $J_{x_1}, \ldots, J_{x_s}$ tal que

$$[a,b] \subset \left[\bigcup_{k=1}^{r} I_{n_k}\right] \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{s} J_{x_i}\right].$$

Consideremos P, uma partição de $[a,b]$ formada por a, b e os extremos dos intervalos I_{n_k} e J_{x_i} que pertencem a $[a,b]$ ordenados de forma crescente. Denotemos com $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum $\bar{I}_{n_k}$ e com $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ os restantes. Observe que $]t_{\beta-1}, t_\beta[\cap I_{n_k} = \emptyset$ para todo $k = 1, \ldots r$, pois caso contrário um dos extremos de I_{n_k} estaria estritamente entre $t_{\beta-1}$ e t_β o que contradiz a ordem em que foram considerados os pontos de P. Portanto, um intervalo da forma $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ esta contido em algum $\bar{J}_{x_i}$.

$$\begin{aligned}
\overline{s}(f,P) - \underline{s}(f,P) &= \sum \omega_\alpha (t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta (t_\beta - t_{\beta-1}) \\
&\leq \omega \sum (t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum (t_\beta - t_{\beta-1}) \\
&\leq \omega \frac{\epsilon}{2\omega} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) < \epsilon
\end{aligned}$$

Logo f é integrável.

($\Leftarrow$): Veja apêndice (Tem que fazer!) $\square$

Exemplo: Seja $D = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\csc(\pi/x)) & \text{se} \quad x \notin D \\ 2 & \text{se} \quad x \in D. \end{cases}$$

é integrável, pois o conjunto de suas discontinuidades D tem medida nula.

7.3 Relações entre Derivação e Integração

Theorem 7.3.1 (Teorema Fundamental do Cálculo (versão 1)) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Consideremos a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

então

1. *F é lipchitziana em $[a, b]$ e portanto contínua.*
2. *Se f for contínua em $x_0 \in [a, b]$ então F é derivável nesse ponto e $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Proof: **item 1**: Sejam, $x_1 < x_2$ dois pontos no intervalo $[a, b]$ e $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\, dt \leq M(x_2 - x_1).$$

item 2: Seja $\epsilon > 0$, pelo fato de f ser contínua em x_0 existe $\delta > 0$ tal que, se $t \in I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ então $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon/2$, portanto

$$\sup_{t \in I_\delta(x_0)} |f(t) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Agora, se considerarmos $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ teremos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(t) - f(x_0)\big)\, dt \right| \\ &= \sup_{t \in I_\delta(x_0)} |f(t) - f(x_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

portanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

□

Definição: Dizemos que $F : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva (ou antiderivada) de $f : I \to \mathbb{R}$ se

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Observação: Do teorema anterior temso que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, uma primitiva desta função é

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Theorem 7.3.2 *Se F e G são duas primitivas da função f no intervalo I, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$G(x) = F(x) + C \quad \textit{para todo} \quad x \in I.$$

Proof: Considere a função $H = G - F$, então $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Como I é um intervalo, segue que $H(x) = C$, $C =$ constante, para todo $x \in I$. Dai segue o resultado desejado. □

Observação: Do teorema Anterior podemos concluir que todas as primitivas de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ são da forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C. \tag{3.3}$$

Notação: se $a \leq b$ denotaremos

$$\int_b^a f(t)\, dt := -\int_a^b f(t)\, dt.$$

Note que segundo esta notação teremos que $\int_a^a f(t)\, dt = 0$.

Exemplo: Seja $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. Do teorema fundamental do cálculo (versão 1) a função

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt,$$

é uma antiderivada de f, por outro lado, sabemos que uma outra antiderivada é $\ln(x)$, log do teorema anterir temos que

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + C \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

Em particular, $\ln(1) = C$, como $\ln(1) = 0$ segue que $C = 0$, isto é

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

Esta última, muitas vezes é usada para definir a função logaritmo.

Theorem 7.3.3 (Teorema Fundamental do Cálculo (versão 2)) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável que possui uma primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ então*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Proof: Se f for contínua, este resultado segue imediatamente do fato que sua primitiva F sería da forma (3.3). Vejamos o caso geral, isto é, assumindo somente que f é integrável. Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição do intertvalo $[a, b]$ e consideremos F uma primitiva de f em $[a, b]$, logo $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Aplicando o Teorema do valor médio temos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

para alguns $t_i \in]x_{i-1}, x_i[$, porem

$$\underline{s}(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{s}(f, P),$$

e portanto

$$\underline{s}(f,P) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{s}(f,P),$$

para qualquer partição P de $[a,b]$. Desde que f é integrável segue que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

$\square$

Observação: do teorema anterior, podemos concluir que se f é integrável pudendo não ser contínua, caso tenha uma antiderivada então esta deverá ser da forma (3.3), pois

$$\int_a^x f(t)\ dt = F(x) - F(a) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + F(a).$$

Theorem 7.3.4 (Substituição de Variáveis) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\phi : [c,d] \to [a,b]$ uma função de classe C^1 tal que $\phi(c) = a$ e $\phi(d) = b$. Então*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\ dt$$

Proof: Denotemos com $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\ dx$. Consideremos a função $g(t) = F(\phi(t))$. Segue, do Teorema Fundamental do Cálculo (versão 1), que $g'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$. Assim, do Teorema Fundamental do Cálculo (versão 2) segue que

$$\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\ dt = g(d) - g(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

$\square$

Observação: No teorema anterior anterior se fez a substituição $x = \phi(t)$ e portando $dx = \phi'(t)dt$.

Exemplo: Seja $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva de classe C^1, calculemos o valor da integral

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\ dx.$$

Assumamos que u é invertível (estritamente crescente por exemplo) e cuja função inversa $u^{-1} : [u(a), u(b)] \to [a,b]$ é contínua, logo u^{-1} é de classe C^1. Consideramos a substituição de variáveis $x = u^{-1}(t)$ logo aplicando o teorema anterior temos que

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\ dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{u'(u^{-1}(t))}{u(u^{-1}(t))}(u^{-1})'(t)\ dt = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{1}{t}\ dt = \ln(u(b)) - \ln(u(a)).$$

Note que não ha necesidade de ímpor a invertíbilidade de u ou até mesmo a contínuidade da função inversa, pois usando o teorema fundamental do cálculo temos que:

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\ dx = \int_a^b [\ln(u(x))]'\ dx = \ln(u(b)) - \ln(u(a)).$$

Theorem 7.3.5 (Integração por Partes) *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções com derivada f', g' (limitadas) integráveis, então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Proof: O resultado segue imediatamente de

$$(fg)' = f'g + fg'$$

integrando e usando o Teorema Fundamental do cálculo obtemos o resultado desejado. □

Theorem 7.3.6 (Fórmula de taylor com Resto Integral) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e com derivadas contínuas ate a ordem $n+1$ ($n \geq 0$). Então, para $x, x_0 \in [a, b]$, temos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,dt.$$

Proof: Provemos usando indução. Para $n = 0$ o resultado é justamente o Teorema fundamental do Cálculo, por tanto se verifica. Supondo então válido para n, mostermos que será válido para $n + 1$. Por hipótese indutiva temos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}\,dt$$

Integrando por partes temos que

$$\int_a^b f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}\,dt = -\frac{f^{(n)}(t)}{n}(x - t)^n\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,dt$$

substituindo concluimos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,dt$$

□

Theorem 7.3.7 (Teorema do Valor Médio para Integrais) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe $\theta \in]a, b[$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\theta)(b - a).$$

Proof: Consideremos a função $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Por ser f contínua, temos que F é derivável e $F' = f$. Pelo teorema de valor médio existe $\theta \in]a, b[$ tal que $F(b) - F(a) = f(\theta)(b-a)$. Dai segue o resultado. $\square$

Theorem 7.3.8 (Teorema do Valor Médio para Integrais com Peso) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa e integrável. Então, existe $\theta \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)p(x)\, dx = f(\theta) \int_a^b p(x)\, dx.$$

Proof: Denotemos com $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$ e $P = \int_a^b p(x)\, dx$, então

$$mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x), \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b].$$

Integrando, temos que

$$mP \leq \int_a^b f(x)p(x)\, dx \leq MP.$$

Como f é contínua, a função $x \mapsto f(x)P$ é contínua tendo como valor mínimo e máximo respectivamente, as quantidades mP e MP, logo pelo Teorema do Valor intermediário temos que existe $\theta \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)p(x)\, dx = f(\theta)P.$$

$\square$

Observação: o teorema anterior continua válido se considerarmos p não positiva ao invés de não negativa, para isso basta considerar $-p$ em lugar de p.

Theorem 7.3.9 (Bonnet) *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, sendo que f é monótona com $f(a) = 0$ e g contínua. Então existe $\theta \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(b) \int_\theta^b g(x)\, dx.$$

Proof:

$\square$

[No caso de f ter derivada integrável] Definimos $G(x) = -\int_x^b g(t)\, dt$, logo $G' = g$. Integrando por partes e usando o teorema anterior temos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\, dt &= f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\, dx \\
&= -G(\theta) \int_a^b f'(x)\, dx \\
&= f(b) \int_\theta^b g(x)\, dx,
\end{aligned}$$

para algum $\theta \in [a, b]$.

Corollary 7.3.10 *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, sendo que f é monótona e g contínua. Então existe $\theta \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\theta g(x)\,dx + f(b)\int_\theta^b g(x)\,dx.$$

Proof: Consideremos $h(x) = f(x) - f(a)$ então h e g satisfazem as condições do teorema anterior, logo existe $\theta \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b h(x)g(x)\,dx = h(b)\int_\theta^b g(x)\,dx,$$

logo

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx - f(a)\int_a^b g(x)\,dx = f(b)\int_\theta^b g(x)\,dx - f(a)\int_\theta^b g(x)\,dx,$$

de onde segue o resultado. □

7.4 Exercícios

1. Seja $\alpha \neq \beta$, mostre que a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dado por $f(a) = \alpha$ e $f(x) = \beta$ para $x \in]a,b]$ é integrável e calcule sua integral.

2. Mostre que as funções $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [1,2] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se} \quad x \in [1,2] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}.$$

   não são integráveis.

3. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas. Considerando as notações $M(h) = \sup\limits_{x \in [a,b]} h(x)$ e $m(h) = \inf\limits_{x \in [a,b]} h(x)$, mostre que

   (a) $M(f+g) \leq M(f) + M(g)$

   (b) $m(f) + m(g) \leq m(f+g)$

   (c) $M(cf) = cM(f)$ e $m(cf) = cm(f)$, para $c \geq 0$.

   (d) $M(cf) = cm(f)$ e $m(cf) = cM(f)$, para $c < 0$.

   (e) $M(fg) \leq M(f)M(g)$ e $m(fg) \geq m(f)m(g)$, quando f, g são funções não negativas.

   (f) $M(f) - m(f) = \sup\limits_{x,y \in [a,b]} |f(x) - f(y)|$.

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que f e integrável, se e somente se, existe uma sequencia crescente de partições (P_n) do intervalo $[a,b]$, isto é $P_{n+1} \supset P_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} \underline{s}(f, P_n) = \lim_{n \to \infty} \overline{s}(f, P_n).$$

   Neste caso mostre que

$$\int_a^b f(x)\, ds = \lim_{n \to \infty} \underline{s}(f, P_n) = \lim_{n \to \infty} \overline{s}(f, P_n).$$

5. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. Dê um exemplo de que este resultado não vale se removemos a continuidade da função.

6. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$. Mostre que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

7. Uma função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita *função escada*, se o intervalo $[a,b]$ pode ser decomposto em um número finito de subintervalos tal que h é constante en cada um desses subintervalos.

   (a) Mostre que funções escadas em $[a,b]$ são integráveis e calcule sua integral.

   (b) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P uma partição do intervalo $[a,b]$ mostre existe uma função escada h tal que

$$\overline{s}(f, P) = \int_a^b h(x)\, dx.$$

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que, se alguma soma inferior de f coincide com uma soma superior, então f é constante.

9. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjunto de medida nula, mostre que $A \cup B$ tem medida nula.

10. Sejam $A_n \subset \mathbb{R}$ conjuntos de medida nula para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que o conjunto $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tem medida nula.

11. Diz-se que um conjunto A tem conteúdo nulo se, para cada $\epsilon > 0$ é possível encontrar um número finito de intervalos abertos $I_1, I_1, \ldots, I_N$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{N} |I_i| < \epsilon.$$

   (a) Mostre que todo conjunto de conteúdo nulo tem medida nula.

   (b) Mostre que o conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ tem conteúdo nulo.

   (c) Todo conjunto de medida nula, tem conteúdo nulo? Justifique sua resposta.

12. Seja $r \in]0, 1[$, considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = r^{n-1} n(n + 1)$ quando $x \in]1/(n + 1), 1/n]$. Mostre que esta função é integrável e que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{1 - r}.$$

13. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a, b]$ deriváveis. Defina $\phi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \int_a^{\beta(x)} f(t)\, dt.$$

   (a) Prove que ϕ é derivável e que $\phi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x)$.

   (b) Seja $\psi : I \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$, calcule ψ'.

   (c) Use estes resultados para calcular $F'(x)$, onde $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é dado por

$$F(x) = \int_0^{x^2} (1 + t^3)^{-1}\, dt, \qquad F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1 + t^2}\, dt$$

14. Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável, dizemos que f é par se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$ e dizemos que f é ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$.

   (a) Mostre que, se f é par, então $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2\int_0^L f(x)\, dx$.

   (b) Mostre que, se f é ímpar, então $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0$.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $p > 0$, isto é, $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $b - a = p$ tem-se que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_0^p f(x)\, dx.$$

16. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \int_x^1 f(t)\ dt$ para todo $x \in [0,1]$. Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

17. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que f' é integrável e $m = (a+b)/2$.

    (a) A função $F(x) = (x-m)f(x)$ é derivável?

    (b) Prove que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]\ dx.$$

18. Substituindo p não negativo por p positivo no teorema 7.3.8, mostre que é possível encontrar o ponto c no intervalo $]a,b[$.

19. Sejam $f, p : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções tais que f é contínua, p integrável e $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que, se

$$\int_a^b f(x)p(x)\ dx = f(a)\int_a^b p(x)\ dx,$$

então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(a) = f(c)$. Mostre tambem que o resultado vale se trocamos $f(a)$ por $f(b)$ na hipótese e na conclusão.

20. Considere a função dada por $f(x) = -x$ para $|x| \leq 1$ e $f(x) = x$ para $|x| > 1$.

    (a) A função $F(x) = |x^2 - 1|/2$ é uma antiderivada de f?

    (b) $\displaystyle\int_{-2}^3 f(x)\ dx$ e $F(3) - F(-2)$ coincidem?

21. Usando a definição integral de $\ln(x)$, dê uma nova prova de que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ para $a, b > 0$, do seguinte modo: escreva

$$\int_1^{ab} \frac{1}{t}\ dt = \int_1^a \frac{1}{t}\ dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\ dt,$$

e agora use uma mudança de variável apropriada na última integral.

Capítulo 8

Integrais Impróprias

Ate agora somente definimos a noção integrabilidade de funções limitadas em intervalos limitados. Nesta seção extenderemos esta noção a funções não limitadas ou definidas em intervalos ilimitados.

8.1 Integrabilidade de funções não limitadas

Se consideramos a função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/\sqrt{x}$, evidentemente não podemos aplicar a integral de Riemann, pois esta função não é limitada, porêm suas restrições aos intervalos $[\epsilon, 1]$ são limitadas quando $0 < \epsilon < 1$. Mais ainda, nesses intervalos, são Riemann integráveis e

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2(1 - \sqrt{\epsilon}).$$

Neste sentido parece razoável definir a integral desta função como

$$\int_0^1 f(x)\, dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)\, dx = 2.$$

Porêm o limite pode ou não existir, se considerarmos outras funções não limitadas. Para ilustrar esta afirmação consideremos as funções $g, h :]0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 1/x$, $h(x) = \sin(1/x)/x^2$, temos que

$$\int_\epsilon^1 g(x)\, dx = -\ln(\epsilon) \quad \text{e} \quad \int_\epsilon^1 h(x)\, dx = \cos(1) - \cos(1/\epsilon).$$

logo,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 g(x)\, dx = \infty \quad \text{e} \quad \nexists \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 g(x)\, dx.$$

Neste ponto, ressaltaremos a diferença que exite entre convergência e existência de limite: convergência significa que o limite existe e é finito.

Definição: Seja $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que suas restrições aos intervalos $[a+\epsilon, b]$ são Riemann integráveis quando $0 < \epsilon < b - a$. O limite

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx. \tag{1.1}$$

convirgindo ou não, será chamado de integral imprópria de f no intervalo $]a, b]$ e denotado por $\int_a^b f(x)\, dx$.

Definição: Seja $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ uma função tal que suas restrições aos intervalos $[a + \epsilon, b]$ são Riemann integráveis quando $0 < \epsilon < b - a$. Dizemos que f é integrável em $]a, b]$ se sua integral imprópria converge.

Observações:

1. A função f não está definida no extremo a logo podemos defini-a nesse ponto atribuindo qualquer valor porêm a integrabilidade a função, isto é a convergência da integral imprópria, não dependerá do valor que f assuma nesse ponto.

2. Veremos posteriormente que as integrais impróprias e integral de Riemann coincidem quando são aplicadas a funções limitadas, o que justifica o uso da mesma notação para ambas integrais.

Exemplo:Podemos considerar por exemplo a função $f, g, h :]0, 1] \to \mathbb{R}$ funções dadas por $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/\sqrt{x}$ e $h(x) = x$. Desde que

$$\int_\epsilon^1 f(x)\, dx = \ln(1) - \ln(\epsilon), \quad \int_\epsilon^1 g(x)\, dx = 2(\sqrt{1} - \sqrt{\epsilon}), \quad \int_\epsilon^1 h(x)\, dx = \frac{1}{2}(1^2 - \epsilon^2),$$

podemos afirmar que f não é integrável enquanto g e h são integraveis e

$$\int_0^1 g(x)\, dx = 2, \quad \int_0^1 h(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

Observe que, atribuindo qualquer valor a $h(0)$ a função h é integrável no sentido de Riemann. O leito pode verificar que a integral de Riemann desta função no intervalo $[0, 1]$ conicide com 1/2.

Theorem 8.1.1 *Seja $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ limitada tal que suas restrições $f\big|_{[a+\epsilon,b]}$ são integráveis para todo $\epsilon > 0$. Então para qualquer valor real atribuído a $f(a)$, a integral imprópria de f converge e coincide com a integral de Riemann da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

Proof: Primeiro atribuímos qualquer valor real fixado a $f(a)$. Mostremos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável verificando que o conjunto de suas descontinuidades tem medida nula. Seja $\epsilon > 0$, consideremos o intervalo $I_0 =]a - \epsilon/4, a + \epsilon/4[$. Como $f\big|_{[a+(\epsilon/4),b]}$ é integrável o conjunto de suas descontinuidades possui medida nula, isto é existe uma sequencia de intervalos abertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cobre as descontinuidades de $f\big|_{[a+(\epsilon/4),b]}$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, as possiveis discontinuidades de f estão contidas na reuniao de intervalos abertos $\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ sendo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| = |I_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

portanto o conjunto de discontinuidades de f em $[a,b]$ possui medida nula, logo f é Riemann integrável. O fato da integral impropria coincidir com a noção da integral da função limitada é consequencia da seguinte desigualdade:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx \right| \;\leq\; \int_a^{a+\epsilon} |f(x)|\, dx \leq M\epsilon,$$

onde $M = \sup\limits_{[a,b]} |f|$. Claramente o limite do lado direito é zero quando $\epsilon \to 0$, portanto

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx.$$

□

Exemplo: Considere $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Esta função é limitada e integrável, pois seu único ponto de descontinuidade (atribuindo qualquer valor a $f(0)$) é $x = 0$. Calcular sua integral atravez de supremos ou ínfimos de somas parciais pode ser pouco agradável, porem o teorema anterior nos oferece uma alternativa para ese cálculo.

$$\int_\epsilon^1 f(x)\, dx = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\Big|_\epsilon^1 = -\epsilon^2 \sin\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)$$

Como o limite do lado direito existe e é zero quando $\epsilon \to 0$, temos que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Exemplo: Seja $p > 0$ consideremos a função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x^p$. Claramante esta função é ilimitada, porem é integravel em qualquer intervalo $[\epsilon, 1]$, pois é contínua nesse intervalo para todo $\epsilon > 0$, logo

$$\int_\epsilon^1 f(x)\, dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-p}[1 - \epsilon^{1-p}], \quad \text{se} \quad p \neq 1.$$

Neste caso a integral imprópria existe (converge) se $p < 1$, alem disso

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{1-p}.$$

Para $p > 1$ a integral imprópria diverge e o mesmo acontece para $p = 1$ (verifique!).

Theorem 8.1.2 *Seja $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que suas restrições $f\big|_{[a+\epsilon,b]}$ são integráveis para todo $\epsilon > 0$, então a integral imprória $\int_a^b f(x)\, dx$ converge se e somente se existe uma constante $M > 0$ tal que $\int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx \leq M$ para todo $\epsilon > 0$.*

Proof: Consideremos a função $\phi(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$. Com as hipóteses dadas esta função é não crescente no intervalo $]0, b-a]$. Logo o o limite pela direita de 0 desta função converge se e somente for limitada superiormente. □

Corollary 8.1.3 *Se $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ são funções não negativas tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in]a, b]$, então*

1. *se a integral imprópria de g converge então a integral imprópria de f converge.*
2. *se a integral imprópria de f diverge então a integral imprópria de g diverge.*

Proof: por comparação tem-se que

$$\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, dx \leq \int_{a+\epsilon}^{b} g(x)\, dx$$

para todo $\epsilon > 0$. Logo, se a integral imprópria de g converge o membro direito da desigualdade anterior seria limitado e por tanto a integral imprópria de f converge. Agora se a integral impropria de f diverge o lado esquerdo da desigualdade anterior seria ilimitada e portanto a integral imprópria de g diverge. □

Exemplo: A integral impropria da função $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1 + \sin(1/x)}{\sqrt{x}}$ converge pois $f(x) \leq g(x)$ onde $g(x) = 2/\sqrt{x}$ e a integral imprópria de g converge.

Como a Integral imprópria é um limite, então se as integrais improprias de f e g convergem, então também ira convergir a soma $f + g$ e o produto com uma constante cf, além disso

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx, \quad \int_a^b [cf](x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

Dizemos que uma integral imprópria de f converge absolutamente se a integral imprópria de $|f|$ converge

Theorem 8.1.4 *se a integral imprópria de $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ converge absolutamente então a integral imprópria de f converge, alem disso*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Proof: Consideremos as funções $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ definidas em $]a, b]$. Logo estas funções são não negativas e

$$f^+(x) \leq |f(x)|, \quad f^-(x) \leq |f(x)|, \quad \text{para todo} \quad x \in]a, b],$$

portanto pelo teorema de comparação temos que as integrais impróprias destas funções convergem e como $f = f^+ - f^-$ segue que a integral imprópria de f converge. Observe que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f^+(x)\, dx - \int_a^b f^-(x)\, dx \leq \int_a^b f^+(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$
$$-\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f^-(x)\, dx - \int_a^b f^+(x)\, dx \leq \int_a^b f^-(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

de onde segue que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

$\square$

Exemplo: A integral impropria da função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{\cos(\ln(x))}{\sqrt{x}}$ converge absolutamente pois a intergral imprópria de $|f(x)| = |\cos(\ln(x))|/\sqrt{x} \leq 1/\sqrt{x}$ e esta última converge.

A seguir algumas daremos algumas definições de integrabilidade para funções as quais possivelmente são ilimitadas em algum ponto (ou extremo) do seu intervalo de definição.

1. Integrabilidade de funções $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ que poderiam ser ilimitadas nas proximidades de b: Suponhamos que as restrições de f aos intervalos $[a, b-\epsilon]$ são Riemann integráveis para todo $\epsilon > 0$. Dizemos que a função f é integrável em $[a, b[$ se a "integral imprópria"

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx$$

converge. Neste caso este limite é denotado por $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

2. Integrabilidade para funções $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ as quais poderiam ser ilimitadas nas proximidades de a e b: Suponhamos que as restrições de f aos intervalos $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ sejam Riemann integráveis para todo $\epsilon > 0$ pequeno. A função f é integrável em $]a, b[$ se as integrais impróprias de f, em $]a, c]$ e $[c, b[$ convergem para algum $c \in]a, b[$, neste caso definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

3. Integrabilidade de funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ as quais poderiam ser ilimitadas nas proximidades de algum $c \in]a, b[$: Suponhamos que as restrições de f aos intervalos $[a, c-\epsilon_1]$ e $[c+\epsilon_2, b]$ sejam Riemann integráveis para todo $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ pequeno, então f é integrável se as integrais impróprias de f, em $[a, c[$ e $]c, b]$, convergem, neste caso definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x); dx + \int_c^b f(x); dx.$$

Da integrábilidade da função podemos concluir que o limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x); dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x); dx \right]$$

existe. Este valor é chamado de valor principal de Cauchy. O reciproco recíproco não é verdadeiro, isto é pode existir o valor principal de Cauchy e a função não ser integrável como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo Consideremos a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, logo esta função não é integrável, pois

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \ln(\epsilon) = -\infty$$

porem o limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx \right] = \lim_{\epsilon \to 0} [\ln(\epsilon) - \ln(\epsilon)] = 0$$

existe.

8.2 Integrabilidade de Funções definidas em intervalos não limitados

Definição: Seja $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que é limitada é integrável en cada intervalo finito $[a, r]$ para todo $r > a$ então f será integrável (em $[a, \infty[$) se o limite $\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\, dx$ convergir, neste caso adotaremos a notação

$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\, dx.$$

a qual será dita de integral imprópria. Caso o limite anterior não convirja dizemos que a integral imprópria diverge.

Resultados similares à seção anterior são análogos as quais mencionaremos e cuja prova fica como exercício

Theorem 8.2.1 *Se $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ são funções não negativas tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, \infty[$, então*

1. *se a integral imprópria de g converge então a integral imprópria de f converge.*
2. *se a integral imprópria de f diverge então a integral imprópria de g diverge.*

Exemplo: para cada $x > 0$ função Gamma

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt,$$

é uma integral imprópria a qual somente faz sentido se for convergente. Esta integral será convergente se e somete se as integrais impróprias nos intervalos $]0, 1]$ e $[1, \infty[$ forem convergentes. Para $t \in]0, 1]$ tem-se $0 < e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$ e

$$\int_0^1 t^{x-1}\, dt = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 t^{x-1}\, dt = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{x}(1 - r^x) = \frac{1}{x}$$

Por comparação a integral imprópria de $e^{-t}t^{x-1}$ no intervalo $]0, 1]$ converge. Para analizar a convergência no intervalo $[1, \infty[$ primeiro observe que, como $\lim_{t\to\infty} e^{-t/2}t^{x-1} = 0$, segue que existe uma constante positiva k tal que $e^{-t/2}t^{x-1} \leq k$ para todo $t \geq 1$. Multiplicando por $e^{-t/2}$ ambos lados desta desigualdade encontramos que

$$0 < e^{-t}t^{x-1} \leq ke^{-t/2}, \quad \forall t \in [1, \infty[.$$

Desde que

$$\int_0^\infty ke^{-t/2}\, dt = \lim_{r\to\infty} \int_0^r ke^{-t/2}\, dt = \lim_{r\to\infty} 2k(1 - e^{-r/2}) = 2k$$

Por comparação a integral imprópria de $e^{-t}t^{x-1}$ no intervalo $[1, \infty[$ converge.

Como a Integral imprópria é um limite, então se as integrais improprias de f e g convergem, então tambem ira convergir a soma $f + g$ e o produto com uma constante cf, além disso

$$\int_a^\infty (f + g)(x)\, dx = \int_a^\infty f(x)\, dx + \int_a^\infty g(x)\, dx, \quad \int_a^\infty [cf](x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

Dizemos que uma integral imprória de f converge absolutamente se a integral imprópria $|f|$ converge

Theorem 8.2.2 *Seja $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável em $[a, r]$ para todo $r > a$. Se a integral imprópria de converge absolutamente então a integral imprópria converge.*

Exemplo: Consideremos a função $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (-1)^n/n$ para $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$, logo a integral impropria desta função converge, porêm não converge absolutamente.

8.3 Exercícios

1. Estude a convergência o divergência das seguintes integrais imprópias

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

2. Considere a função $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x/(1-x^2)$.

   (a) Mostre que o limite $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} f(x)\,dx$ converge.

   (b) Mostre que f não é integrável em $]-1,1[$.

   (c) Porqué o resultado do primeiro item não garante que f seja integrável em $]-1,1[$? Justifique sua resposta.

3. Considere a função f definida no intervalo $[0,1]$ e possívelmente ilimitada em cada $x_i = 1/i$ com $i \in \mathbb{N}$. Forneça uma definição de integrabilidade para esta função e defina sua "integral imprópria" de tal forma que, ao considerar funções limitadas, esta definição coincida com a integral de Riemann.

4. Seja $p > 0$, estude a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx.$$

5. Mostre que a integral imprópria $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ converge, porêm não converge absolutamente.

6. Seja $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função positiva decrescente e Riemann integrável em $[1,b]$ para todo $b > 1$. Mostre que

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty f(n) \quad \text{converge.}$$

   Seguidamente, aplique este resultado para mostrar que a integral de Poison $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge.

7. Seja $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se a integral imprópria $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge então

$$\lim_{r\to\infty} \int_r^\infty f(x)\,dx = 0.$$

8. Seja $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente. Mostre que se a integral imprópria $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge então $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

9. Mostre que a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = n$ quando $x \in]1/(n+1), 1/n]$, não é integrável.