CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

19 de Outubro

Aula de hoje: Números naturais e Axiomas de Peano.

Referências:

- LIMA, Elon L., Análise Real.
- LIMA, Elon L., Um curso de análise.

Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) s é uma função injetiva;

Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) s é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) s é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(P3) se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto que satisfaz as condições

Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) s é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(P3) se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto que satisfaz as condições

a) $1 \in X$,
b) dado qualquer $n \in X$ tem-se que $s(n) \in X$,

então temos que $X = \mathbb{N}$.

- Temos de P1 que $s(n) \neq s(m)$, sempre que $n \neq m$;

- Temos de P1 que $s(n) \neq s(m)$, sempre que $n \neq m$;
- P2 diz que 1 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Temos de P1 que $s(n) \neq s(m)$, sempre que $n \neq m$;
- P2 diz que 1 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- P3 é conhecido como *Princípio de indução*. Ele pode ser enunciado da seguinte forma equivalente:

- Temos de P1 que $s(n) \neq s(m)$, sempre que $n \neq m$;
- P2 diz que 1 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- P3 é conhecido como *Princípio de indução*. Ele pode ser enunciado da seguinte forma equivalente:

O PRINCÍPIO DE INDUÇÃO

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural n satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $s(n)$ também a satisfaz, então todos os números naturais irão satisfazer $\mathcal{P}$.

- Enfatizamos que P3 é muito útil para se fazer demonstrações. Neste caso, utilizamos a expressão: *demonstração por indução*.

- Enfatizamos que P3 é muito útil para se fazer demonstrações. Neste caso, utilizamos a expressão: *demonstração por indução*.

MUITO IMPORTANTE:

Identificar a hipótese de indução!!!!

- Enfatizamos que P3 é muito útil para se fazer demonstrações. Neste caso, utilizamos a expressão: *demonstração por indução*.

MUITO IMPORTANTE:

Identificar a hipótese de indução!!!!

Exemplo

- *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos* $s(n) \neq n$.

- Enfatizamos que P3 é muito útil para se fazer demonstrações. Neste caso, utilizamos a expressão: *demonstração por indução*.

MUITO IMPORTANTE:

Identificar a hipótese de indução!!!!

Exemplo

- *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos* $s(n) \neq n$.
- *Se* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, *então existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $s(m) = n$.

Operações em $\mathbb{N}$

Definição

Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função sucessor. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ defini-se:

$$\text{Soma} \begin{cases} m + 1 \doteq s(m) \\ m + s(n) \doteq s(m+n) \end{cases}$$

e

$$\text{Produto} \begin{cases} m \cdot 1 \doteq m \\ m \cdot s(n) \doteq m \cdot n + m \end{cases}$$

Teorema

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Temos então as seguintes propriedades:

a) $(m+n)+p = m+(n+p)$;
b) $m+n = n+m$;
c) $m+p = n+p \implies m = n$;
d) $m \cdot n = n \cdot m$;
e) $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$;
f) $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$;
g) $m \cdot (n+p) = (n+p) \cdot m$.

Nova versão do princípio de indução

O princípio de indução

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural k satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $k+1$ também a satisfaz, então todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.

Nova versão do princípio de indução

O princípio de indução

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural k satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $k+1$ também a satisfaz, então todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.

Exemplo

Dado $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$2(1+2+3+\ldots+n) = n(n+1).$$