CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

2 de Fevereiro

Aula de hoje: Continuidade

Tópicos:

- Limites laterais
- Funções contínuas
- Propriedades

Limites

Definição

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in D'$ e $L \in \mathbb{R}$. Escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ quando: para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon, \ \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0.$$

Limites

Definição

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in D'$ e $L \in \mathbb{R}$. Escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ quando: para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon, \ \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0.$$

Importante

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$ quando existir $\epsilon > 0$ de modo que $\forall \delta > 0$ for possível obter $x_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in D$ tal que $|f(x) - L| \geq \epsilon$.
- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \neq 0, \ \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Limites

Definição

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in D'$ e $L \in \mathbb{R}$. Escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ quando: para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon, \; \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0.$$

Importante

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$ quando existir $\epsilon > 0$ de modo que $\forall \delta > 0$ for possível obter $x_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in D$ tal que $|f(x) - L| \geq \epsilon$.
- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \neq 0, \; \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Teorema

Temos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\} \subset D$ que convergir para x_0 tivermos que $\{f(x_n)\}$ converge para L.

Limites laterais

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação:

- **à direita** se $A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq 0, \ \forall \delta > 0.$
- **à esquerda** se $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq 0, \ \forall \delta > 0.$

Limites laterais

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação:

- **à direita** se $A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq 0, \ \forall \delta > 0.$
- **à esquerda** se $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq 0, \ \forall \delta > 0.$

- O conjunto dos pontos acumulação **à direita** será denotado por A'_+.
- O conjunto dos pontos acumulação **à esquerda** será denotado por A'_-.

Limites laterais

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação:

- **à direita** se $A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq 0, \ \forall \delta > 0.$
- **à esquerda** se $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq 0, \ \forall \delta > 0.$

- O conjunto dos pontos acumulação **à direita** será denotado por A'_+.
- O conjunto dos pontos acumulação **à esquerda** será denotado por A'_-.

Definição

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função, e $a \in D'_+$ e $b \in D'_-$. Dizemos que

- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que
$$|f(x) - L| < \epsilon, \ \forall x \in (a, a + \delta).$$
- $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que
$$|f(x) - L| < \epsilon, \ \forall x \in (b - \delta, b).$$

Limites laterais e limite

Teorema

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função, e $x_0 \in D'_+ \cap D'_-$. Então,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Continuidade

Definição

Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in D$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \ \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Continuidade

Definição

Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in D$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \ \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Importante

- O δ acima depende de ϵ e de x_0.
- Se x_0 é um ponto isolado de D, então f é contínua em x_0.
- Se $x_0 \in D'$, então f é contínua em x_0 se, e somente se, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f é contínua em x_0 se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\} \subset D$ que convergir para x_0 tivermos que $\{f(x_n)\}$ converge para L.

Primeiras propriedades

Proposição

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em x_0. Então:

(a) são contínuas em x_0 as funções $f \pm g$ e $f \cdot g$.

(b) se $g(x_0) \neq 0$, então a função f/g é contínua em x_0.

Primeiras propriedades

Proposição

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em x_0. Então:

(a) são contínuas em x_0 as funções $f \pm g$ e $f \cdot g$.

(b) se $g(x_0) \neq 0$, então a função f/g é contínua em x_0.

Proposição

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ contínua em x_0 e $c \in \mathbb{R}$.

(a) Se $f(x_0) < c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < c$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(b) Se $f(x_0) > c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > c$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Primeiras propriedades

Proposição

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em x_0. Então:

(a) são contínuas em x_0 as funções $f \pm g$ e $f \cdot g$.

(b) se $g(x_0) \neq 0$, então a função f/g é contínua em x_0.

Proposição

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ contínua em x_0 e $c \in \mathbb{R}$.

(a) Se $f(x_0) < c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < c$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(b) Se $f(x_0) > c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > c$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Aplicação

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e não negativa. Então $\int_a^b f(x)dx = 0$ se, e somente se, $f \equiv 0$.

Resultados importantes

Teorema

Sejam $f : A \to B$ contínua em $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ contínua em $f(x_0)$. Nestas condições, a composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0.

Resultados importantes

Teorema

Sejam $f : A \to B$ contínua em $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ contínua em $f(x_0)$. Nestas condições, a composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0.

Teorema

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset A$ é um compacto, então $f(K)$ é compacto. Em particular, f assume máximo e mínimo em K.

Resultados importantes

Teorema

Sejam $f : A \to B$ contínua em $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ contínua em $f(x_0)$. Nestas condições, a composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0.

Teorema

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset A$ é um compacto, então $f(K)$ é compacto. Em particular, f assume máximo e mínimo em K.

Teorema (do valor intermediário)

Sejam $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e c um ponto pertencente ao intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$. Nestas condições, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$.

Resultados importantes

Teorema

Sejam $f : A \to B$ contínua em $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ contínua em $f(x_0)$. Nestas condições, a composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0.

Teorema

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset A$ é um compacto, então $f(K)$ é compacto. Em particular, f assume máximo e mínimo em K.

Teorema (do valor intermediário)

Sejam $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e c um ponto pertencente ao intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$. Nestas condições, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$.

Corolário

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num intervalo I que assume valores positivos e negativos, então existe $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.