CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

13 de Fevereiro

Aula de hoje: Diferenciabilidade

Funções diferenciáveis

Definição

Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e defina

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \ t \in (a, b) \setminus \{x\}.$$

Funções diferenciáveis

Definição

Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e defina

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \ t \in (a, b) \setminus \{x\}.$$

Dizemos que f é diferenciável (ou derivável) em $x \in [a, b]$ se existe o limite $\lim_{t \to x} \phi(t)$. Neste caso, denotamos

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

e dizemos que $f'(x)$ é a derivada de f no ponto x.

Funções diferenciáveis

Definição

Considere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e defina

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \ t \in (a,b) \setminus \{x\}.$$

Dizemos que f é diferenciável (ou derivável) em $x \in [a,b]$ se existe o limite $\lim\limits_{t \to x} \phi(t)$. Neste caso, denotamos

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

e dizemos que $f'(x)$ é a derivada de f no ponto x.

Observações

- Uma função derivável em todo o seu domínio é dita simplesmente **derivável**.
- Note que

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Alguns resultados

Teorema

Se f é dif. em x, então é contínua em x. A recíproca não é verdadeira.

Alguns resultados

Teorema

Se f é dif. em x, então é contínua em x. A recíproca não é verdadeira.

Proposição

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em x. Então as funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (supondo $g(x) \neq 0$) também diferenciáveis em x. Além disso, temos as seguintes fórmulas:

(a) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;

(b) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

IMPORTANTE!!!!!

Teorema

Um função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dif. num ponto x_0 se, e somente se existem $L \in \mathbb{R}$ e uma função r tais que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

IMPORTANTE!!!!!

TEOREMA

Um função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dif. num ponto x_0 se, e somente se existem $L \in \mathbb{R}$ e uma função r tais que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

- Observe que a função $h \mapsto r(h)$ é contínua em 0.

IMPORTANTE!!!!!

Teorema

Um função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dif. num ponto x_0 se, e somente se existem $L \in \mathbb{R}$ e uma função r tais que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

- Observe que a função $h \mapsto r(h)$ é contínua em 0.
- Note que pondo $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{h}$, obtemos

$$f(x_0+h) = f(x_0) + [f'(x_0) + \rho(h)]h, \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} \rho(h) = 0.$$

Regra da cadeia

Teorema

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ tais que $f([a,b]) \subset [c,d]$. Suponha f dif. em x e g em $y = f(x)$. Nestas condições, $g \circ f$ é dif. em x e vale a igualdade

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Regra da cadeia

Teorema

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ tais que $f([a,b]) \subset [c,d]$. Suponha f dif. em x e g em $y = f(x)$. Nestas condições, $g \circ f$ é dif. em x e vale a igualdade

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Dem: Note que

$$f(x+h) = f(x) + [f'(x) + \rho(h)]h, \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} \rho(h) = 0,$$
$$g(y+k) = g(y) + [g'(y) + \sigma(k)]k, \quad \text{com} \quad \lim_{k\to 0} \sigma(k) = 0.$$

Regra da cadeia

Teorema

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ tais que $f([a,b]) \subset [c,d]$. Suponha f dif. em x e g em $y = f(x)$. Nestas condições, $g \circ f$ é dif. em x e vale a igualdade

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Dem: Note que

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + [f'(x) + \rho(h)]h, \quad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \rho(h) = 0, \\ g(y+k) &= g(y) + [g'(y) + \sigma(k)]k, \quad \text{com} \quad \lim_{k \to 0} \sigma(k) = 0. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = g'(y)f'(x) + \theta(h),$$

sendo

$$\theta(h) = \sigma[f(x+h) - f(x)][f'(x) + \rho(h)] + g'(y)\rho(h).$$

COROLÁRIO (DERIVADA DA INVERSA)

Seja $f : [a, b] \to [c, d]$ uma função que possui inversa $g = f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$. Suponha f é derivável em x e g contínua em $y = f(x)$. Nestas condições, g é derivável em y se, e somente se, $f'(x) \neq 0$.

Corolário (derivada da inversa)

Seja $f : [a,b] \to [c,d]$ uma função que possui inversa $g = f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$. Suponha f é derivável em x e g contínua em $y = f(x)$. Nestas condições, g é derivável em y se, e somente se, $f'(x) \neq 0$.

Exemplo

Considere $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Teoremas do valor médio

Máximo e mínimo local

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui um máximo local em um ponto $p \in X$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(t) \leq f(p)$, para todo $t \in (p - \delta, p + \delta)$. A definição de mínimo local é feita de forma análoga.

Teoremas do valor médio

Máximo e mínimo local

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui um máximo local em um ponto $p \in X$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(t) \leq f(p)$, para todo $t \in (p - \delta, p + \delta)$. A definição de mínimo local é feita de forma análoga.

Teorema

Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possua um máximo local no ponto $c \in (a, b)$. Se existe f é dif. em c, então $f'(c) = 0$.

Teoremas do valor médio

Máximo e mínimo local

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui um máximo local em um ponto $p \in X$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(t) \leq f(p)$, para todo $t \in (p-\delta, p+\delta)$. A definição de mínimo local é feita de forma análoga.

Teorema

Suponha que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possua um máximo local no ponto $c \in (a,b)$. Se existe f é dif. em c, então $f'(c) = 0$.

Teorema (Valor médio generalizado)

Suponha f e g duas funções continuas no intervalo $[a,b]$ e diferenciáveis em (a,b). Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) = [g(b) - g(a)]f'(x_0).$$

Teoremas do valor médio

Máximo e mínimo local

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui um máximo local em um ponto $p \in X$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(t) \leq f(p)$, para todo $t \in (p-\delta, p+\delta)$. A definição de mínimo local é feita de forma análoga.

Teorema

Suponha que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possua um máximo local no ponto $c \in (a,b)$. Se existe f é dif. em c, então $f'(c) = 0$.

Teorema (Valor médio generalizado)

Suponha f e g duas funções continuas no intervalo $[a,b]$ e diferenciáveis em (a,b). Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) = [g(b) - g(a)]f'(x_0).$$

Teorema (Valor médio)

Suponha f continua no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = [b-a]f'(x_0).$$

Crescimento e decrescimento

Teorema

Suponha f diferenciável em (a,b).

(a) Se $f'(x) \geq 0$ em todo (a,b), então f não crescente em (a,b).

(b) Se $f'(x) \equiv 0$ em todo (a,b), então $f \equiv c$ em (a,b).

(c) Se $f'(x) \leq 0$ em todo (a,b), então f não decrescente em (a,b).