CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

15 de Fevereiro

Aula de hoje: Derivadas de ordem superior

Funções diferenciáveis

Definição

Considere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e defina

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \; t \in (a,b) \setminus \{x\}.$$

Dizemos que f é diferenciável (ou derivável) em $x \in [a,b]$ se existe o limite $\lim\limits_{t \to x} \phi(t)$. Neste caso, denotamos

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

e dizemos que $f'(x)$ é a derivada de f no ponto x.

Observações

- Uma função derivável em todo o seu domínio é dita simplesmente **derivável**.
- Se f é diferenciável em seu domínio e f' é contínua, então dizemos que f é uma função de classe C^1.

- Suponha que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dif. num subintervalo $J \subset I$. Neste caso fica bem definida a função $f' : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$J \ni t \mapsto f'(t) = \frac{df}{dt}(t).$$

Tal função é chamada de **derivada** de f.

- Suponha que $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dif. num subintervalo $J \subset I$. Neste caso fica bem definida a função $f': J \to \mathbb{R}$ dada por

$$J \ni t \mapsto f'(t) = \frac{df}{dt}(t).$$

Tal função é chamada de **derivada** de f.

- Suponha agora que $f': J \to \mathbb{R}$ também é dif. num subintervalo $L \subset J$. Então, temos a função $f'': L \to \mathbb{R}$ dada por

$$L \ni t \mapsto f''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)(t).$$

Tal função é chamada de **derivada de segunda ordem** de f.

- Suponha que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dif. num subintervalo $J \subset I$. Neste caso fica bem definida a função $f' : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$J \ni t \mapsto f'(t) = \frac{df}{dt}(t).$$

Tal função é chamada de **derivada** de f.

- Suponha agora que $f' : J \to \mathbb{R}$ também é dif. num subintervalo $L \subset J$. Então, temos a função $f'' : L \to \mathbb{R}$ dada por

$$L \ni t \mapsto f''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)(t).$$

Tal função é chamada de **derivada de segunda ordem** de f.

- De modo geral, podemos (às vezes) considerar a função $f^{(n)} : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ dada por

$$I \ni t \mapsto f^{(n)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right)(t).$$

Tal função é chamada de **derivada de ordem** n de f. (Para $k = 0$ dizemos que f é contínua.)

- Suponha que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dif. num subintervalo $J \subset I$. Neste caso fica bem definida a função $f' : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$J \ni t \mapsto f'(t) = \frac{df}{dt}(t).$$

Tal função é chamada de **derivada** de f.

- Suponha agora que $f' : J \to \mathbb{R}$ também é dif. num subintervalo $L \subset J$. Então, temos a função $f'' : L \to \mathbb{R}$ dada por

$$L \ni t \mapsto f''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)(t).$$

Tal função é chamada de **derivada de segunda ordem** de f.

- De modo geral, podemos (às vezes) considerar a função $f^{(n)} : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ dada por

$$I \ni t \mapsto f^{(n)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right)(t).$$

Tal função é chamada de **derivada de ordem** n de f. (Para $k = 0$ dizemos que f é contínua.)

Definição

Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^k, $k \in \mathbb{N}$, se existem todas as derivadas até ordem k e $f^{(k)}$ é contínua.

Polinômio de Taylor (resto de Lagrange)

Teorema

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}$ é contínua em $[a,b]$ e $f^{(n+1)}$ existe em (a,b). Fixemos $x_0 \in [a,b]$ e $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $x_0 + h \in [a,b]$.

Polinômio de Taylor (resto de Lagrange)

Teorema

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}$ é contínua em $[a,b]$ e $f^{(n+1)}$ existe em (a,b). Fixemos $x_0 \in [a,b]$ e $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $x_0 + h \in [a,b]$. Considere:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} t^k.$$

Polinômio de Taylor (resto de Lagrange)

Teorema

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}$ é contínua em $[a,b]$ e $f^{(n+1)}$ existe em (a,b). Fixemos $x_0 \in [a,b]$ e $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $x_0 + h \in [a,b]$. Considere:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} t^k.$$

Nestas condições, existe $\theta \in (x_0, x_0 + h)$ tais que

$$f(x_0 + h) = P(h) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Demonstração

- Defina $\alpha = x_0$, $\beta = x_0 + h$ e a função $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(\beta) - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (\beta - x)^k + \frac{M}{(n+1)!} (\beta - x)^{n+1} \right],$$

sendo M escolhida de modo a termos $g(\alpha) = 0$.

Demonstração

- Defina $\alpha = x_0$, $\beta = x_0 + h$ e a função $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(\beta) - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (\beta - x)^k + \frac{M}{(n+1)!} (\beta - x)^{n+1} \right],$$

  sendo M escolhida de modo a termos $g(\alpha) = 0$.
- Note que $g(\beta) = 0$, logo existe $\theta \in (\alpha, \beta)$ tal que $g'(\theta) = 0$.

Demonstração

- Defina $\alpha = x_0$, $\beta = x_0 + h$ e a função $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(\beta) - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(\beta - x)^k + \frac{M}{(n+1)!}(\beta - x)^{n+1}\right],$$

  sendo M escolhida de modo a termos $g(\alpha) = 0$.
- Note que $g(\beta) = 0$, logo existe $\theta \in (\alpha, \beta)$ tal que $g'(\theta) = 0$.
- Uma vez que

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(\beta - x)^n + \frac{M}{n!}(\beta - x)^n$$

  etão para $x = \theta$ chega-se em

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(\beta - \theta)^n = \frac{M}{n!}(\beta - \theta)^n$$

  ou seja,

$$M = f^{(n+1)}(\theta).$$

Aplicação

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Aplicação

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função de clase C^n, com $n \geq 2$. Seja x_0 um ponto crítico tal que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \; f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Aplicação

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função de clase C^n, com $n \geq 2$. Seja x_0 um ponto crítico tal que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local.

Aplicação

Definição

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função de clase C^n, com $n \geq 2$. Seja x_0 um ponto crítico tal que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local.

(b) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local.

Aplicação

Definição

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Teorema

Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função de clase C^n, com $n \geq 2$. Seja x_0 um ponto crítico tal que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local.

(b) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local.

(c) Se n é ímpar então x_0 é ponto de inflexão local, isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad \text{ou} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0,$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.