CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

24 de Outubro

Aula de hoje: Princípio da boa ordenação

Referências:

- LIMA, Elon L., Análise Real.
- LIMA, Elon L., Um curso de análise.

Os números Naturais

Consideremos três objetos:

- Um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais*;
- Existe um elemento $1 \in \mathbb{N}$;
- Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cada número natural $s(n)$ é dito *sucessor* de n.

Para tal função, exige-se as seguintes propriedades (Axiomas de Peano):

(P1) s é uma função injetiva;

(P2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(P3) se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto que satisfaz as condições

a) $1 \in X$,
b) dado qualquer $n \in X$ tem-se que $s(n) \in X$,

então temos que $X = \mathbb{N}$.

Operações em $\mathbb{N}$

Definição

Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função sucessor. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ defini-se:

$$\text{Soma} \begin{cases} m + 1 \doteq s(m) \\ m + s(n) \doteq s(m + n) \end{cases}$$

e

$$\text{Produto} \begin{cases} m \cdot 1 \doteq m \\ m \cdot s(n) \doteq m \cdot n + m \end{cases}$$

Princípio de indução

Princípio de indução

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural k satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $s(k)$ também a satisfaz, então todos os números naturais irão satisfazer $\mathcal{P}$.

Princípio de indução

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 satisfazer $\mathcal{P}$ e se, do fato de um número natural k satisfazer $\mathcal{P}$ puder-se concluir que $k+1$ também a satisfaz, então todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.

Relação de ordem

Definição

Dados dois números naturais m, n diremos que m é menor do que n se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, utilizamos a notação $m < n$.

Relação de ordem

Definição

Dados dois números naturais m, n diremos que m é menor do que n se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, utilizamos a notação $m < n$.

Teorema

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. São válidas as seguintes propriedades:

a) se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$;

b) $m < n$, então $m + p < n + p$;.

c) se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$;

d) vale apenas uma, e somente uma, das possibilidades: $m = n$, $m < n$, ou $n < m$

Relação de ordem

Definição

Dados dois números naturais m, n diremos que m é menor do que n se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, utilizamos a notação $m < n$.

Teorema

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. São válidas as seguintes propriedades:

a) se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$;

b) $m < n$, então $m + p < n + p$;.

c) se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$;

d) vale apenas uma, e somente uma, das possibilidades: $m = n$, $m < n$, ou $n < m$

Definição

Dado $n \in \mathbb{N}$, defini-se o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Em particular, $I_{n+1} = I_n \cup \{n+1\}$, isto é,

$$I_{n+1} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}.$$

Princípio da boa ordenação

Teorema: Princípio da Boa Ordenação

Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ contém um menor elemento, isto é, existe $p \in A$ tal que $p \leq m$, para todo $m \in A$.

PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

TEOREMA: PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ contém um menor elemento, isto é, existe $p \in A$ tal que $p \leq m$, para todo $m \in A$.

Demonstração:

- Se $1 \in A$, então não temos o que provar. Suponha então $1 \notin A$ e defina o seguinte conjunto
$$X = \{n \in \mathbb{N};\ I_n \subset A^C\}.$$
- Note que $1 \in X$. Além disso, não podemos ter $X = \mathbb{N}$, pois A é não vazio. O Axioma da indução nos diz que deve existir $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$.
- Por construção de X, devemos ter que todos os elementos de A são maiores que n, porém nem todos são maiores que $n+1$. Assim, existe algum $p \in A$ tal que $p \leq n+1$.
- Afirmamos que $p = n+1$. De fato, se fosse $p < n+1$, então teríamos
$$n < p < n+1,$$
o que é impossível.
- Por fim, tem-se $p \leq m$, para todo $m \in A$, pois se existisse $q \in A$ com $q < p$, então teríamos novamente $n < q < n+1$.

Teorema: Segundo Princípio de Indução

Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade: dado $n \in \mathbb{N}$, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então $n \in X$. Nestas condições, $X = \mathbb{N}$.

TEOREMA: SEGUNDO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO

Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade: dado $n \in \mathbb{N}$, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então $n \in X$. Nestas condições, $X = \mathbb{N}$.

Demonstração:

- Seja $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Afirmamos que $Y = \emptyset$.
    - De fato, se não o for, então existiria um menor elemento $p \in Y$.
- Para todo número natural $m < p$ devemos ter $m \in X$.
- Mas, pela hipótese sobre X, isso implicaria em $p \in X$. Uma contradição.

- O segundo princípio de indução pode ser enunciado da seguinte forma equivalente:

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade referente a números naturais. Se, dado $n \in \mathbb{N}$, do fato de todo número natural $m < n$ satisfazer $\mathcal{P}$ puder ser demonstrado que n também a satisfaz, então o todos os números naturais também satisfazem $\mathcal{P}$.

Definição

Um número natural p chama-se primo quando $p \neq 1$ e não se pode escrever $p = m \cdot n$ com $m < p$ e $n < p$.

Teorema (Fundamental da Aritmética)

Todo número natural se decompõe, de modo único, como o produto de fatores primos.

Definição

Um número natural p chama-se primo quando $p \neq 1$ e não se pode escrever $p = m \cdot n$ com $m < p$ e $n < p$.

Teorema (Fundamental da Aritmética)

Todo número natural se decompõe, de modo único, como o produto de fatores primos.

Demonstração (Existência da decomposição):

- Considere $n \in \mathbb{N}$ e suponha que todo número natural menor do que n possa ser decomposto como o produto de fatores primos.
- Só existem duas possibilidades: ou n é primo, e então nada temos o que demonstrar, ou n não é primo.
- Neste caso, $n = k \cdot p$, como $k < n$ e $p < n$. Por hipótese, sabemos que k e p se decompõe como produto de primos, logo o mesmo ocorre com n.
- Assim, conclui-se que todo número natural se decompõe como o produto de fatores primos.