CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

26 de Outubro

Aula de hoje: Conjuntos finitos e infinitos

Referências:

- LIMA, Elon L., Análise Real.
- LIMA, Elon L., Um curso de análise.
- RUDIN, W., Principles of Mathematical Analysis

Conjuntos finitos

Definição

Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou se existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.

Conjuntos finitos

Definição

Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou se existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.

- Se existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$, então podemos fazer uma *contagem* dos elementos de X no seguinte sentido:

$$\varphi(1) \doteq x_1,\ \varphi(2) \doteq x_2,\ \ldots, \varphi(n) \doteq x_n.$$

Conjuntos finitos

Definição

Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou se existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.

- Se existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$, então podemos fazer uma *contagem* dos elementos de X no seguinte sentido:

$$\varphi(1) \doteq x_1,\ \varphi(2) \doteq x_2,\ \ldots, \varphi(n) \doteq x_n.$$

- Se um conjunto X não é finito, então ou ele é vazio ou, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito.

Conjuntos finitos

Definição

Um conjunto X é dito finito se é vazio, ou se existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.

- Se existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$, então podemos fazer uma *contagem* dos elementos de X no seguinte sentido:

$$\varphi(1) \doteq x_1, \ \varphi(2) \doteq x_2, \ \ldots, \varphi(n) \doteq x_n.$$

- Se um conjunto X não é finito, então ou ele é vazio ou, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito. De fato, considere $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e seja $\varphi : I_n \to \mathbb{N}$ uma função qualquer. Ponha

$$p = \varphi(1) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n).$$

Temos então $\varphi(x) < p$, para todo $x \in I_n$. Assim, $p \notin Im(\varphi)$, donde φ não pode ser sobrejetora.

TEOREMA

(a) Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.

Teorema

(a) Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.

(b) Considere $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.

Teorema

(a) Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.

(b) Considere $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.

(c) Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções

$$\varphi : I_n \to X \;\text{ e }\; \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

Teorema

(a) Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.

(b) Considere $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.

(c) Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções

$$\varphi : I_n \to X \text{ e } \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

(d) Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

.

Teorema

(a) Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.

(b) Considere $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.

(c) Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções

$$\varphi : I_n \to X \text{ e } \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

(d) Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

.

Definição

Seja X um conjunto finito. O número de elementos de X é definido como sendo o natural n tal que tem-se a bijeção $f : I_n \to X$. Caso X seja vazio, diremos que X tem zero elementos.

Teorema

(a) Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então, X é finito se, e somente se, Y é finito.

(b) Considere $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$, então $A = I_n$.

(c) Se existir uma bijeção $f : I_m \to I_n$, então $n = m$. Em particular, se existem bijeções

$$\varphi : I_n \to X \ \text{ e } \ \psi : I_m \to X,$$

então $m = n$.

(d) Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

.

Definição

Seja X um conjunto finito. O número de elementos de X é definido como sendo o natural n tal que tem-se a bijeção $f : I_n \to X$. Caso X seja vazio, diremos que X tem zero elementos.

Teorema

Se X é um conjunto finito e $Y \subset X$, então o número de elementos de Y não supera o de X e só é igual quando $Y = X$.

Teorema

Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.

Teorema

Sejam X um conjunto finito e $Y \subset X$ um subconjunto próprio. Neste caso, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$.

Demonstração:

De fato, suponha que o teorema seja falso e que possamos encontrar X e Y como acima e uma bijeção $f : X \to Y$.

- Uma vez que X é finito, podemos considerar uma bijeção $\varphi : I_n \to X$.
- Note que $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n e a restrição de φ ao conjunto A fornece uma bijeção $\widetilde{\varphi} : A \to Y$.
- Assim, temos a bijeção $g : I_n \to A$ dada por

$$g \doteq \widetilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ I_n \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dashed, "g"] & A \arrow[u, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

Conjuntos infinitos

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Conjuntos infinitos

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção com uma parte própria dele.

Conjuntos infinitos

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção com uma parte própria dele.

Exemplos

- O conjunto naturais pares é infinito.

Conjuntos infinitos

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção com uma parte própria dele.

Exemplos

- O conjunto naturais pares é infinito.
- O conjunto dos números primos é infinito.

Conjuntos infinitos

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção com uma parte própria dele.

Exemplos

- O conjunto naturais pares é infinito.
- O conjunto dos números primos é infinito.
- São conjuntos infinitos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Conjuntos infinitos

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção com uma parte própria dele.

Exemplos

- O conjunto naturais pares é infinito.
- O conjunto dos números primos é infinito.
- São conjuntos infinitos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Teorema

Sejam $f : X \to Y$ e $g : A \to B$ duas funções.

Conjuntos infinitos

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção com uma parte própria dele.

Exemplos

- O conjunto naturais pares é infinito.
- O conjunto dos números primos é infinito.
- São conjuntos infinitos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Teorema

Sejam $f : X \to Y$ e $g : A \to B$ duas funções.

(a) Se Y é finito e f injetiva, então X é finito.

Conjuntos infinitos

Definição

Um conjunto X é dito infinito quando não é finito.

Observação

Um conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção com uma parte própria dele.

Exemplos

- O conjunto naturais pares é infinito.
- O conjunto dos números primos é infinito.
- São conjuntos infinitos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Teorema

Sejam $f : X \to Y$ e $g : A \to B$ duas funções.

(a) Se Y é finito e f injetiva, então X é finito.

(b) Se A é finito e g sobrejetiva, então B é finito.