CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

31 de Outubro

Aula de hoje: Enumerabilidade

Referências:

- LIMA, Elon L., Análise Real.
- LIMA, Elon L., Um curso de análise.
- RUDIN, W., Principles of Mathematical Analysis

Motivação

- Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. & \end{cases} \tag{1}$$

Motivação

- Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

- f é injetiva;

Motivação

- Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

- f é injetiva;
- f é bijetiva

Motivação

- Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\dfrac{n-1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

- f é injetiva;
- f é bijetiva
- $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$;

Enumerabilidade

Definição

Dizemos que um conjunto X é enumerável se é finito, ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Enumerabilidade

Definição

Dizemos que um conjunto X é enumerável se é finito, ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Observação

Dados dois conjuntos A e B escreva $A \sim B$ para indicar que existe uma bijeção $f : A \to B$. Assim, temos:

ENUMERABILIDADE

DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto X é enumerável se é finito, ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

OBSERVAÇÃO

Dados dois conjuntos A e B escreva $A \sim B$ para indicar que existe uma bijeção $f : A \to B$. Assim, temos:

a) Se A é finito, então $A \sim I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

c) Se A é infinito, então é **enumerável** se $A \sim \mathbb{N}$;

d) A é **não-enumerável** se não é enumerável e nem finito.

EXEMPLOS

- $\mathbb{N}$ é enumerável.
- $\mathbb{Z}$ é enumerável.
- O conjunto $\mathbb{P}$ dos número naturais pares é enumerável.

Exemplos

- $\mathbb{N}$ é enumerável.
- $\mathbb{Z}$ é enumerável.
- O conjunto $\mathbb{P}$ dos número naturais pares é enumerável.
- Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável. De fato, se X é infinito então existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Assim, definindo $Y = f(\mathbb{N})$ temos que $f : \mathbb{N} \to Y$ é bijetiva.

Observação

- Se A é um conjunto enumerável, então podemos escrever A como uma lista, isto é,

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Observação

- Se A é um conjunto enumerável, então podemos escrever A como uma lista, isto é,

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

- De fato, seja $A \sim \mathbb{N}$. Tomando uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ vale a igualdade

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\},$$

logo basta definir $x_n = f(n)$.

Observação

- Se A é um conjunto enumerável, então podemos escrever A como uma lista, isto é,

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

- De fato, seja $A \sim \mathbb{N}$. Tomando uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ vale a igualdade

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\},$$

logo basta definir $x_n = f(n)$.

Observação

É muito importante tomar cuidado com as nomenclaturas nas referências. Por exemplo, nas notas de aula do Prof. Higidio, um conjunto é dito enumerável se $\mathbb{N} \sim X$. Em tais notas um conjunto é duto contável se é finito, ou enumerável.

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Teorema

Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração:

- Considere um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$ e defina indutivamente a função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo:

$$f(1) = min(X);\ f(2) = min(X \setminus \{f(1)\});\ f(3) = min(X \setminus \{f(1), f(2)\}).$$

- Assim, assumindo que determinamos $f(n)$, então defini-se

$$f(n+1) = min(X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

- f é injetiva e $n \leq f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: dado $k \in X$ temos necessariamente $k \in \{f(1), \ldots, f(k)\}$.

- se não fosse, então $k \notin \{f(1), \ldots, f(k)\}$;
- Isso significa que $k \in X \setminus \{f(1), \ldots, f(k)\}$.
- Segue que $f(k+1) \leq k$.
- Como $k+1 \leq f(k+1)$, obtemos

$$k+1 \leq f(k+1) \leq k,$$

donde $k+1 \leq k$, o que é um absurdo.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Teorema

Se A é enumerável e $B \subset A$ é infinito, então B é enumerável.

Demonstração: Nestas condições, A é infinito e existe uma bijeção $f : A \to \mathbb{N}$.

- seja $Y = f(B) \subset \mathbb{N}$;
- a função $F : B \to Y$ dada por $F(x) = f(x)$ é bijetiva.
- Como B é infinito, então Y é infinito e portanto enumerável.
- Assim, existe uma bijeção $g : Y \to \mathbb{N}$.
- Note então que $g \circ F$ é uma bijeção de B sobre $\mathbb{N}$.
- Portanto B é enumerável.

$\blacksquare$

PROPOSIÇÃO

Considere uma função $f : X \to Y$, sendo X e Y conjuntos infinitos.

(a) Se Y é enumerável e f injetiva, então X é enumerável;

(b) Se X é enumerável e f sobrejetiva, então Y é enumerável;

Teorema

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

TEOREMA

O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

Demonstração:
Considere a função $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $h(n,m) = 2^n 3^m$.

- Tal função é injetiva em virtude da unicidade da decomposição em fatores primos.
- Uma vez que $\mathbb{N}$ é enumerável, então obtemos da proposição anterior que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Considere agora X, Y dois conjuntos enumeráveis e sejam $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$ duas bijeções.

- Defina então a função $j : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ pondo
$$j(n,m) = (f(n), g(m)).$$
- Uma vez que j é uma função sobrejetiva, então obtemos da proposição que $X \times Y$ é enumerável.

■

$\mathbb{Q}$ É ENUMERÁVEL

- A função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$f(m,n) = \frac{m}{n}$$

é sobrejetiva.

União

Teorema

Seja $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos enumeráveis. Nestas condições, temos que

$$X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$$

é enumerável.

União

Teorema

Seja $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos enumeráveis. Nestas condições, temos que

$$X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$$

é enumerável.

Demonstração:

- para cada $n \in \mathbb{N}$, considere uma bijeção $f_n : \mathbb{N} \to A_n$;
- Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ pondo $f(m, n) = f_m(n)$.

∎

NÃO ENUMERÁVEIS

- O intervalo $I = (0, 1)$;
- O conjunto dos números transcendentes;
- O conjunto dos números irracionais;
- $\mathbb{R}$ é não enumerável;
- O conjunto $X = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}$ é não enumerável.