CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

7 de Novembro

Aula de hoje: Corpos ordenados

Referências:

- Notas de aula do Prof. Higidio.

Definição

Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

chamadas de **adição** e **multiplicação**, respectivamente, tais que:

Definição

Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \ \text{ e } \ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

chamadas de **adição** e **multiplicação**, respectivamente, tais que:

(A1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$.

Definição

Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

chamadas de **adição** e **multiplicação**, respectivamente, tais que:

(A1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$.

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(P2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(P3) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Definição

Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

chamadas de **adição** e **multiplicação**, respectivamente, tais que:

(A1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$.

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(P2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(P3) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$.

- Utiliza-se a notação $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ para indicar que o corpo $\mathbb{K}$ está munido das operações $+$ e $\cdot$.

Observações

- Num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ temos que o elemento y que satisfaz (A4) é único. Assim, utiliza-se a notação $y = -x$.
- Num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ temos que o elemento y que satisfaz (P4) é único. Assim, utiliza-se a notação $y = x^{-1}$.
- Muitas vezes omite-se o símbolo $\cdot$, isto é, escrevemos xy ao invés de $x \cdot y$.

Observações

- Num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ temos que o elemento y que satisfaz (A4) é único. Assim, utiliza-se a notação $y = -x$.
- Num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ temos que o elemento y que satisfaz (P4) é único. Assim, utiliza-se a notação $y = x^{-1}$.
- Muitas vezes omite-se o símbolo $\cdot$, isto é, escrevemos xy ao invés de $x \cdot y$.

Teorema

Num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ valem as seguintes afirmações.

(a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$;

(b) $x + y = x \Rightarrow y = 0$;

(c) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$;

(d) $-(-x) = x$;

(e) $x \neq 0$ e $xy = xz \Rightarrow y = z$;

(f) $x \neq 0$ e $xy = x \Rightarrow y = 1$;

(g) $x \neq 0$ e $xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$;

(h) $x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$;

(i) $0x = 0$;

(j) $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$;

(k) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$;

(l) $(-x)(-y) = xy$;

O corpo dos número racionais

Definição

Considere o conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

munido das seguintes operações: dados $p = m_1/n_1$ e $q = m_2/n_2$, ponha

$$p + q = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} \text{ e } p \cdot q = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Nestas condições, $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo chamado de **números racionais.**

Definição

Dizemos que um corpo $\mathbb{K}$ é ordenado se contem um subconjunto P, chamado de subconjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

Definição

Dizemos que um corpo $\mathbb{K}$ é ordenado se contem um subconjunto P, chamado de subconjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) Se $a, b \in P$, então
$$a + b \in P \ \text{ e } \ a \cdot b \in P$$

(b) Se $x \in \mathbb{K}$, então apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:
$$x \in P, \ -x \in P, \ \text{ ou } \ x = 0$$

Observação

- $\mathbb{K} = P \cup \{0\} \cup (-P)$, sendo $-P = \{x; \ -x \in P\}$.
- $0 \notin P$ e $1 \in P$.
- Se $x \in P$, então $x^{-1} \in P$.
- Dado $y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tem-se $y^2 = y \cdot y \in P$.

Definição

Dizemos que um corpo $\mathbb{K}$ é ordenado se contem um subconjunto P, chamado de subconjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) Se $a, b \in P$, então
$$a + b \in P \text{ e } a \cdot b \in P$$

(b) Se $x \in \mathbb{K}$, então apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:
$$x \in P, \ -x \in P, \ \text{ ou } \ x = 0$$

Observação

- $\mathbb{K} = P \cup \{0\} \cup (-P)$, sendo $-P = \{x; \ -x \in P\}$.
- $0 \notin P$ e $1 \in P$.
- Se $x \in P$, então $x^{-1} \in P$.
- Dado $y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tem-se $y^2 = y \cdot y \in P$.

Exemplo

Em $\mathbb{Q}$, temos $P = \left\{q = \dfrac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Relação de ordem

Definição

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e P o conjunto dos elementos positivos. Dados $a, b \in \mathbb{K}$ defini-se

$$a < b \doteq b - a \in P.$$

Relação de ordem

Definição

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e P o conjunto dos elementos positivos. Dados $a, b \in \mathbb{K}$ defini-se

$$a < b \doteq b - a \in P.$$

Introduz-se ainda as notações

- $a \leq b$, se $a < b$, ou $a = b$.
- $a > b$, se $b < a$.
- $a \geq b$, se $a > b$, ou $a = b$.

Relação de ordem

Definição

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e P o conjunto dos elementos positivos. Dados $a, b \in \mathbb{K}$ defini-se

$$a < b \doteq b - a \in P.$$

Introduz-se ainda as notações

- $a \leq b$, se $a < b$, ou $a = b$.
- $a > b$, se $b < a$.
- $a \geq b$, se $a > b$, ou $a = b$.

Observação

Note que se $\mathbb{K}$ é ordenado, então o conjunto $\mathbb{K}^+ = \{x; x > 0\}$ coincide com P.

TEOREMA

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a, bc \in \mathbb{K}$.

(a) $a < b$, ou $a = b$, ou $a > b$.

(b) $a < b$ e $b < c$ implica $a < c$.

(c) $a < b$ implica $a + b < b + c$.

(d) se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.