CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

16 de Novembro

Aula de hoje: Supremo e ínfimo em $\mathbb{R}$

Referências:

- Notas de aula do Prof. Higidio.

Definição

Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ no qual existem duas operações

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

chamadas de **adição** e **multiplicação**, respectivamente, tais que:

(A1) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(A3) existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(A4) para cada $x \in \mathbb{K}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = 0$.

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$;

(P2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(P3) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existe um elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$.

- Utiliza-se a notação $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ para indicar que o corpo $\mathbb{K}$ está munido das operações $+$ e $\cdot$.

Definição

Dizemos que um corpo $\mathbb{K}$ é ordenado se contem um subconjunto P, chamado de subconjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) Se $a, b \in P$, então
$$a + b \in P \ \text{ e } \ a \cdot b \in P$$

(b) Se $x \in \mathbb{K}$, então apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:
$$x \in P, \ -x \in P, \ \text{ ou } \ x = 0$$

Definição

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e P o conjunto dos elementos positivos. Dados $a, b \in \mathbb{K}$ defini-se
$$a < b \doteq b - a \in P.$$

COTA SUPERIOR E COTA INFERIOR

Cota superior e cota inferior

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $E \subset \mathbb{K}$ um subconjunto.

(a) Dizemos que E é limitado superiormente se existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que

$$x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{1}$$

Qualquer $\beta \in \mathbb{K}$ que satisfaz a desigualdade (1) é dito **cota superior** de E.

Cota superior e cota inferior

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $E \subset \mathbb{K}$ um subconjunto.

(a) Dizemos que E é limitado superiormente se existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que
$$x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{1}$$
Qualquer $\beta \in \mathbb{K}$ que satisfaz a desigualdade (1) é dito **cota superior** de E.

(b) Dizemos que E é limitado inferiormente se existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que
$$\alpha \leq x, \ \forall x \in E. \tag{2}$$
Qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ que satisfaz a desigualdade (2) é dito **cota inferior** de E.

Cota superior e cota inferior

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $E \subset \mathbb{K}$ um subconjunto.

(a) Dizemos que E é limitado superiormente se existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que

$$x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{1}$$

Qualquer $\beta \in \mathbb{K}$ que satisfaz a desigualdade (1) é dito **cota superior** de E.

(b) Dizemos que E é limitado inferiormente se existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha \leq x, \ \forall x \in E. \tag{2}$$

Qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ que satisfaz a desigualdade (2) é dito **cota inferior** de E.

(c) Dizemos que E é limitado se o for superiormente e inferiormente. Neste caso, existem $\alpha, \beta \in S$ tais que

$$\alpha \leq x \leq \beta, \ \forall x \in E. \tag{3}$$

Observações

- É muito importante observar que em nenhuma das definições acima estamos supondo $\alpha \in E$ ou $\beta \in E$.

Observações

- É muito importante observar que em nenhuma das definições acima estamos supondo $\alpha \in E$ ou $\beta \in E$.
- Quando existe $m \in E$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in E$, então dizemos que m é o menor elemento de E. Neste caso, utilizamos a notação
$$m = \min E.$$
- Quando existe $M \in E$ tal que $x \leq M$, para todo $x \in E$, então dizemos que M é o maior elemento de E. Neste caso, utilizamos a notação
$$M = \max E.$$

Supremo e ínfimo

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $E \subset \mathbb{K}$ um subconjunto.

Supremo e ínfimo

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $E \subset \mathbb{K}$ um subconjunto.

(a) Um elemento $\beta \in \mathbb{K}$ é dito supremo de E, se satisfaz as seguintes condições:

(i) β é uma cota superior de E;

(ii) se $\gamma < \beta$, então γ não é uma cota superior de E.

Supremo e ínfimo

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $E \subset \mathbb{K}$ um subconjunto.

(a) Um elemento $\beta \in \mathbb{K}$ é dito supremo de E, se satisfaz as seguintes condições:

(i) β é uma cota superior de E;

(ii) se $\gamma < \beta$, então γ não é uma cota superior de E.

(b) Um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ é dito ínfimo de E, se satisfaz as seguintes condições:

(i) α é uma cota inferior de E;

(ii) se $\alpha < \gamma$, então γ não é uma cota inferior de E.

O supremo de E, quando existe, será denotado por $\sup E$.

Supremo e ínfimo

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $E \subset \mathbb{K}$ um subconjunto.

(a) Um elemento $\beta \in \mathbb{K}$ é dito supremo de E, se satisfaz as seguintes condições:

(i) β é uma cota superior de E;

(ii) se $\gamma < \beta$, então γ não é uma cota superior de E.

(b) Um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ é dito ínfimo de E, se satisfaz as seguintes condições:

(i) α é uma cota inferior de E;

(ii) se $\alpha < \gamma$, então γ não é uma cota inferior de E.

O supremo de E, quando existe, será denotado por $\sup E$.

- Note que $\sup E$, quando existe, é a **menor das cotas superiores**!
- Note que $\inf E$, quando existe, é a **maior das cotas inferiores**!

Exemplos

- Considere em $\mathbb{Q}$ o conjunto $E = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 \leq x < 1\}$. Neste caso,

$$\inf E = 0 \ \text{ e } \ \sup E = 1$$

Exemplos

- Considere em $\mathbb{Q}$ o conjunto $E = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 \leq x < 1\}$. Neste caso,

$$\inf E = 0 \ \text{ e } \ \sup E = 1$$

- Se E possui um elemento máximo M, então $M = \sup E$. Por outro lado, se E possui um elemento mínimo m, então $m = \inf E$.

Exemplos

- Considere em $\mathbb{Q}$ o conjunto $E = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 \leq x < 1\}$. Neste caso,

$$\inf E = 0 \ \text{ e } \ \sup E = 1$$

- Se E possui um elemento máximo M, então $M = \sup E$. Por outro lado, se E possui um elemento mínimo m, então $m = \inf E$.
- Considere E_1 o conjunto dos racionais $r > 0$ e E_2 os dos racionais $s \leq 0$. Note que

$$\inf E_1 = \sup E_2 = 0, \ \ \text{mas} \ \ 0 \notin E_1.$$

Exemplos

- Considere em $\mathbb{Q}$ o conjunto $E = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 \leq x < 1\}$. Neste caso,

$$\inf E = 0 \ \text{ e } \ \sup E = 1$$

- Se E possui um elemento máximo M, então $M = \sup E$. Por outro lado, se E possui um elemento mínimo m, então $m = \inf E$.
- Considere E_1 o conjunto dos racionais $r > 0$ e E_2 os dos racionais $s \leq 0$. Note que

$$\inf E_1 = \sup E_2 = 0, \ \text{ mas } \ 0 \notin E_1.$$

- Considere $E = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Temos $\inf E = 0 \notin E$ e $\sup E = 1 \in E$.

Exemplos

- Considere em $\mathbb{Q}$ o conjunto $E = \{x \in \mathbb{Q};\ 0 \leq x < 1\}$. Neste caso,

$$\inf E = 0 \text{ e } \sup E = 1$$

- Se E possui um elemento máximo M, então $M = \sup E$. Por outro lado, se E possui um elemento mínimo m, então $m = \inf E$.
- Considere E_1 o conjunto dos racionais $r > 0$ e E_2 os dos racionais $s \leq 0$. Note que

$$\inf E_1 = \sup E_2 = 0, \quad \text{mas } 0 \notin E_1.$$

- Considere $E = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Temos $\inf E = 0 \notin E$ e $\sup E = 1 \in E$.
- Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$$A = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \text{ e } p^2 < 2\} \text{ e } B = \{p \in \mathbb{Q};\ p \geq 0 \text{ e } 2 < p^2\}.$$

Neste caso, A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente. Porém, A **não possui supremo** e B **não possui ínfimo.**

O corpo $\mathbb{R}$

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Dizemos que $\mathbb{K}$ satisfaz a propriedade do:

(a) **ínfimo**, se todo subconjunto limitado inferiormente possui ínfimo.

(b) **supremo**, se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo.

O CORPO $\mathbb{R}$

DEFINIÇÃO

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Dizemos que $\mathbb{K}$ satisfaz a propriedade do:

(a) **ínfimo**, se todo subconjunto limitado inferiormente possui ínfimo.

(b) **supremo**, se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo.

OBSERVAÇÃO

Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ satisfaz a propriedade do ínfimo se, e somente se, satisfaz a propriedade do supremo. Em particular, dizemos que um **corpo é completo** se satisfaz uma dessas propriedades.

O corpo $\mathbb{R}$

Definição

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Dizemos que $\mathbb{K}$ satisfaz a propriedade do:

(a) **ínfimo**, se todo subconjunto limitado inferiormente possui ínfimo.

(b) **supremo**, se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo.

Observação

Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ satisfaz a propriedade do ínfimo se, e somente se, satisfaz a propriedade do supremo. Em particular, dizemos que um **corpo é completo** se satisfaz uma dessas propriedades.

Teorema (Dedekind)

Existe um corpo ordenado completo, denotado por $\mathbb{R}$ e chamado de corpo dos números reais, que contém $\mathbb{Q}$ como subcorpo (ordenado).

O CORPO $\mathbb{R}$

DEFINIÇÃO

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Dizemos que $\mathbb{K}$ satisfaz a propriedade do:

(a) **ínfimo**, se todo subconjunto limitado inferiormente possui ínfimo.

(b) **supremo**, se todo subconjunto limitado superiormente possui supremo.

OBSERVAÇÃO

Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ satisfaz a propriedade do ínfimo se, e somente se, satisfaz a propriedade do supremo. Em particular, dizemos que um **corpo é completo** se satisfaz uma dessas propriedades.

TEOREMA (DEDEKIND)

Existe um corpo ordenado completo, denotado por $\mathbb{R}$ e chamado de corpo dos números reais, que contém $\mathbb{Q}$ como subcorpo (ordenado).

- A afirmação $\mathbb{Q}$ como subcorpo (ordenado) diz que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e que as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$, quando aplicadas em $\mathbb{Q}$, coincidem com as operações de $\mathbb{Q}$. Além disso, os racionais positivos também são positivos em $\mathbb{R}$.

TRÊS IMPORTANTES PROPRIEDADES

TRÊS IMPORTANTES PROPRIEDADES

$\mathbb{R}$ É ARQUIMEDIANO

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

Três importantes propriedades

$\mathbb{R}$ é arquimediano

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $a < x < b$.

Três importantes propriedades

$\mathbb{R}$ é arquimediano

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $a < x < b$.

Teorema

Dado $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, existe único $x \in \mathbb{R}$, positivo, tal que $x^2 = b$.

Obs

Dados $s, t \in \mathbb{R}$, com $0 < s < t$, vale

$$s^2 - t^2 < 2s(s - t)$$