CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

28 de Novembro

Aula de hoje: Topologia da reta

Tópicos:

- Ponto interior
- Conjunto aberto
- Conjunto fechado

Módulo

Definição

Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0, \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Módulo

Definição

Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0, \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Observações

- $|a| \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $a = 0$.
- $a \leq |a|$ e $|-a| = |a|$.
- $|ab| = |a||b|$.
- $|a| \leq b$, se e somente se, $-b \leq a \leq b$.
- $|a|^2 = a^2$.
- Fica bem definida a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Em particular, vale

$$\sqrt{x^2} = |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Desigualdade triangular

Desigualdade triangular

Teorema

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Desigualdade triangular

Teorema

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Corolário

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale
$$||a| - |b|| \leq |a-b|.$$

Desigualdade triangular

Teorema

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Corolário

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale
$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ satisfaz
$$|a| < \epsilon, \ \forall \epsilon > 0,$$
então $a = 0$.

Observação: Espaços métricos

Definição

Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é dita uma métrica se:

(M1) $d(x, y) \geq 0$, valendo a igualdade apenas se $x = y$.

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in M$.

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in M$.

Neste caso, dizemos que (M, d) é um espaço métrico.

Observação: Espaços métricos

Definição

Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é dita uma métrica se:

(M1) $d(x, y) \geq 0$, valendo a igualdade apenas se $x = y$.

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in M$.

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in M$.

Neste caso, dizemos que (M, d) é um espaço métrico.

Exemplo

Definindo $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$d(x, y) = |x - y|,$$

tem-se que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Intervalo

Definição

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito um intervalo se vale a seguinte propriedade: dados $a, b \in A$, com $a < b$, então se for $c \in \mathbb{R}$, tal que $a < c < b$, tem-se $c \in A$.

Intervalo

Definição

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito um intervalo se vale a seguinte propriedade: dados $a, b \in A$, com $a < b$, então se for $c \in \mathbb{R}$, tal que $a < c < b$, tem-se $c \in A$.

Notações

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$

Conjunto aberto

Conjunto aberto

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de A se vale a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que o intervalo $I_r = (p - r, p + r)$ está contido em A.

Conjunto aberto

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de A se vale a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que o intervalo $I_r = (p - r, p + r)$ está contido em A.

Importante

- O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.

Conjunto aberto

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de A se vale a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que o intervalo $I_r = (p - r, p + r)$ está contido em A.

Importante

- O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.
- Se $p \in \mathbb{R}$ não é ponto interior de A, então dado qualquer $\epsilon > 0$, vale

$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap A^C \neq \emptyset.$$

Conjunto aberto

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de A se vale a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que o intervalo $I_r = (p - r, p + r)$ está contido em A.

Importante

- O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.
- Se $p \in \mathbb{R}$ não é ponto interior de A, então dado qualquer $\epsilon > 0$, vale

$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap A^C \neq \emptyset.$$

- É possível termos $int(A) = \emptyset$, mesmo que A seja não vazio.

Conjunto aberto

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de A se vale a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que o intervalo $I_r = (p - r, p + r)$ está contido em A.

Importante

- O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.
- Se $p \in \mathbb{R}$ não é ponto interior de A, então dado qualquer $\epsilon > 0$, vale
$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap A^C \neq \emptyset.$$
- É possível termos $int(A) = \emptyset$, mesmo que A seja não vazio.
- Vale a inclusão $int(A) \subset A$, mas nem sempre vale $A \subset int(A)$.

Conjunto aberto

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto interior de A se vale a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que o intervalo $I_r = (p - r, p + r)$ está contido em A.

Importante

- O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.
- Se $p \in \mathbb{R}$ não é ponto interior de A, então dado qualquer $\epsilon > 0$, vale
$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap A^C \neq \emptyset.$$
- É possível termos $int(A) = \emptyset$, mesmo que A seja não vazio.
- Vale a inclusão $int(A) \subset A$, mas nem sempre vale $A \subset int(A)$.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito aberto se $int(A) = A$.

Observação

- Para mostrar que um conjunto A é aberto é suficiente verificar que $A \subset int(A)$, ou seja, que se $p \in A$, então p é ponto interior.
- Em particular, se A não é aberto, então existe $p \in A$ que não é ponto interior.

Observação

- Para mostrar que um conjunto A é aberto é suficiente verificar que $A \subset int(A)$, ou seja, que se $p \in A$, então p é ponto interior.
- Em particular, se A não é aberto, então existe $p \in A$ que não é ponto interior.

Exemplo

- O conjunto vazio é aberto.
- O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.
- O intervalo $[1, 3)$ não é aberto.
- Todo intervalo aberto é um conjunto aberto.

Teorema

Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma coleção de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Temos então:

Teorema

Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma coleção de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Temos então:

(a) O conjunto

$$A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$$

é aberto.

(b) Dada uma coleção finita $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}$, o conjunto

$$B = \bigcap_{j=1}^{n} A_{\alpha_j}$$

é aberto.

Espaço topológico

Definição

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma coleção de subconjuntos $\mathscr{T}$ de X é uma topologia se:

(T1) $X, \emptyset \in \mathscr{T}$.

(T2) A união arbitrária de elementos de $\mathscr{T}$ ainda é um elemento de $\mathscr{T}$.

(T3) A interseção finita de elementos de $\mathscr{T}$ ainda é um elemento de $\mathscr{T}$.

Neste caso, dizemos que $(X, \mathscr{T})$ é um espaço topológico. Cada elemento de $\mathscr{T}$ é dito **conjunto aberto**.

Exemplo

A coleção de todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

CONJUNTO FECHADO

DEFINIÇÃO

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que F é um conjunto fechado se seu complementar F^C é um conjunto aberto.

Conjunto fechado

Definição

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que F é um conjunto fechado se seu complementar F^C é um conjunto aberto.

Exemplo

- O conjunto vazio é fechado.
- O conjunto $\mathbb{R}$ é fechado.
- O intervalo $[1, 3)$ não é fechado.
- Todo intervalo fechado é um conjunto fechado.

Conjunto fechado

Definição

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que F é um conjunto fechado se seu complementar F^C é um conjunto aberto.

Exemplo

- O conjunto vazio é fechado.
- O conjunto $\mathbb{R}$ é fechado.
- O intervalo $[1, 3)$ não é fechado.
- Todo intervalo fechado é um conjunto fechado.

Pergunta:

Quais são os subconjuntos de $\mathbb{R}$ simultaneamente abertos e fechados?

TEOREMA

Seja $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma coleção de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Temos então:

Teorema

Seja $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma coleção de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Temos então:

(a) O conjunto

$$F = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$$

é fechado.

(b) Dada uma coleção finita $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_n}$, o conjunto

$$F = \bigcup_{j=1}^{n} F_{\alpha_j}$$

é fechado.