CMM202 - CMI 062
Análise I
S2 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

7 de Dezembro

Aula de hoje: Conjuntos compactos

Tópicos:

- Ponto de aderência
- Ponto de acumulação
- Conjunto compacto

Conjunto aberto

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto iterior de A se vale a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que o intervalo $I_r = (p - r, p + r)$ está contido em A.

Importante

- O conjunto dos pontos interiores de A será denotado por $int(A)$.
- Se $p \in \mathbb{R}$ não é ponto interior de A, então dado qualquer $\epsilon > 0$, vale

$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap A^C \neq \emptyset.$$

- É possível termos $int(A) = \emptyset$, mesmo que A seja não vazio.
- Vale a inclusão $int(A) \subset A$, mas não é verdade, em geral, que a inclusão $A \subset int(A)$.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito aberto se $int(A) = A$.

TEOREMA

Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma coleção de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Temos então:

(a) O conjunto
$$A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$$
é aberto.

(b) Dada uma coleção finita $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}$, o conjunto
$$B = \bigcap_{j=1}^{n} A_{\alpha_j}$$
é aberto.

Conjunto fechado

Definição

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que F é um conjunto fechado se seu complementar F^C é um conjunto aberto.

Teorema

Seja $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma coleção de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Temos então:

(a) O conjunto
$$F = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$$
é fechado.

(b) Dada uma coleção finita $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_n}$, o conjunto
$$F = \bigcup_{j=1}^{n} F_{\alpha_j}$$
é fechado.

Pontos aderentes e de acumulação

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $p \in \mathbb{R}$.

Pontos aderentes e de acumulação

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $p \in \mathbb{R}$.

(a) Dizemos que p é aderente ao conjunto A se para todo $\epsilon > 0$ tivermos

$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes, denotado por $\overline{A}$, é chamado de **fecho** de A.

Pontos aderentes e de acumulação

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $p \in \mathbb{R}$.

(a) Dizemos que p é aderente ao conjunto A se para todo $\epsilon > 0$ tivermos

$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes, denotado por $\overline{A}$, é chamado de **fecho** de A.

(b) Dizemos que p é um ponto de acumulação do conjunto A se para todo $\epsilon > 0$ tivermos

$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação, denotado por A', é chamado de **derivado** de A.

Pontos aderentes e de acumulação

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $p \in \mathbb{R}$.

(a) Dizemos que p é aderente ao conjunto A se para todo $\epsilon > 0$ tivermos

$$(p-\epsilon, p+\epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes, denotado por $\overline{A}$, é chamado de **fecho** de A.

(b) Dizemos que p é um ponto de acumulação do conjunto A se para todo $\epsilon > 0$ tivermos

$$(p-\epsilon, p+\epsilon) \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação, denotado por A', é chamado de **derivado** de A.

Observação

- $A' \subset \overline{A}$.
- $A \subset \overline{A}$.
- Note que $\overline{A} = A \cup A'$.

Alguns resultados

Teorema

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto.

Alguns resultados

Teorema

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto.

(a) Se $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de A, então toda vizinhança de p contém infinitos elementos de A.

Alguns resultados

Teorema

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto.

(a) Se $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de A, então toda vizinhança de p contém infinitos elementos de A.

(b) O conjunto $\overline{A}$ é fechado.

Alguns resultados

Teorema

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto.

(a) Se $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de A, então toda vizinhança de p contém infinitos elementos de A.

(b) O conjunto $\overline{A}$ é fechado.

(c) O conjunto A é fechado se, e somente se, $\overline{A} = A$.

Alguns resultados

Teorema

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto.

(a) Se $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de A, então toda vizinhança de p contém infinitos elementos de A.

(b) O conjunto $\overline{A}$ é fechado.

(c) O conjunto A é fechado se, e somente se, $\overline{A} = A$.

Observação

Um conjunto é fechado se, e somente se, contem todos os seus pontos aderentes.

Conjuntos compactos

Conjuntos compactos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que uma família de conjuntos abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é um cobertura aberta (ou cobertura por abertos) de A se

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

Conjuntos compactos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que uma família de conjuntos abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é um cobertura aberta (ou cobertura por abertos) de A se

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda .$$

Definição

Uma subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é dito compacto se toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita, isto é, se abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é um cobertura aberta de K, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{\lambda_k} .$$

Conjuntos compactos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que uma família de conjuntos abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é um cobertura aberta (ou cobertura por abertos) de A se

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

Definição

Uma subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é dito compacto se toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita, isto é, se abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é um cobertura aberta de K, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{\lambda_k}.$$

- Exemplo: o intervalo $(0, 1]$ não é compacto.

Alguns resultados

Teorema (Borel-Lebesgue-I)

O intervalo $[a, b]$ é compacto.

Teorema (Borel-Lebesgue-II)

Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.

Teorema (Bolzano-Weirstrass)

Todo conjunto limitado e infinito possui ponto de acumulação.