CMI 022 - Álgebra Linear

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Entregar até 16 de novembro

Exercício 1 *Abaixo temos espaços vetoriais V e subconjuntos $S \subset V$. Verifique quais destes subconjuntos são subespaços. Quando S não for subespaço, indique a propriedade que não é satisfeita.*

1. $V = \mathbb{R}^2$ *e* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$.
2. $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *e* $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}A = 0\}$.
3. $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *e* $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$.
4. $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *e* $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}); A + A^T = 0\}$.
5. $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e* $S = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(x) = f(-x)\}$.

Exercício 2 *Verifique quais afirmações são falsas e quais são verdadeiras. No caso verdadeiro apresente uma justificativa e no falso, um contra-exemplo.*

1. *Sejam V um espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaços vetoriais de V. Então, $U \cap W$ também é subespaço vetorial.*
2. *Sejam V um espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaços vetoriais de V. Então, $U \cup W$ também é subespaço vetorial.*
3. *Sejam V um espaço vetorial, $U, W \subset V$ e o conjunto*

$$S = U + W = \{w = x + y;\ x \in U \quad e \quad y \in W\}$$

Então, S também é subespaço vetorial.

Exercício 3 *A seguir são listados vetores $v_1, \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$. Determine se eles são l.i. ou l.d.*

1. $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ *em* $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (3, 1, 0, 2)\}$ *em* $\mathbb{R}^4$.
3. $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ *em* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4 *Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que são L.I. os conjuntos:*

(a) $\{f, g\}$, *sendo* $f(x) = \cos(x)$ *e* $g(x) = sen(x)$;

(b) $\{f, g, h\}$, *sendo* $f(x) = e^x$ *e* $g(x) = e^{2x}$ *e* $h(x) = e^{3x}$.

Exercício 5 *Seja $\mathbb{P}_3$ o espaço dos polinômios de grau ≤ 3 e considere*

$$p(t) = 1 + 4t - 2t^2 + t^3,\ q(t) = -1 + 9t - 3t^2 + 2t^3, w(t) = -5 + 6t + t^3,\ h(t) = 5 + 7t - 5t^2 + 2t^3.$$

(a) *Verifique que $\{p, q, w, h\}$ é l.d.*

(b) *Encontre uma combinação linear $ap + bq + cw + dh = 0$ em que algum dos coeficientes a, b, c, d é diferente de 0*

(c) *Encontre um elemento de $\{p, q, w, h\}$ que é combinação linear dos outros e escreva essa combinação linear.*