CMI 022 - Álgebra Linear

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA: Entregar até 22 de fevereiro

Exercício 1 *Seja V um espaço vetorial. Suponha que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ são produtos internos em V.*

(a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 + \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ também é produto interno.

(b) Mostre também que se $a > 0$, então $a\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ é produto interno.

Exercício 2 *Sejam V e W espaços vetoriais com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente. Uma transformação linear $T : V \to W$ é uma isometria se $\langle Tu, Tv \rangle_V = \langle u, v \rangle_W$ para todo $u, v \in V$. Mostre que se T é isometria então T é injetora.*

Exercício 3 *Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canônico. Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schimidt à base $\alpha = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ para encontrar uma base ortogonal β.*

Exercício 4 *Dizemos que uma matriz $Q_{n\times n}$ é ortogonal se os vetores colunas de Q formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*

(a) Mostre que uma matriz $Q_{n\times n}$ é ortogonal se, e somente, $Q^T \cdot Q = I$.

(b) Mostre que uma matriz $Q_{n\times n}$ é ortogonal se, e somente,

$$< Qx, Qy >=< x, y >, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$